3. Übungsblatt zu Coxetergruppen

Dr. Carsten Lange

Besprechung in der Vorlesung am 19.12.2007.

1. Aufgabe:
Im Beweis der Propositionen 2.2 und 2.16 benutzten wir die Tatsache, daß zwei einfache Wurzeln δ_1 und δ_2 der Spiegelungsgruppe W den stumpfen Winkel $\pi - \frac{\pi}{m(\delta_1,\delta_2)}$ bilden, wobei $m(\delta_1, \delta_2)$ die Ordnung des Elements $s_{\delta_1} s_{\delta_2}$ in W bezeichnet.

Zeige durch folgende Schritte, daß diese Aussage für zwei einfache Wurzeln $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^n$ wahr ist.

(a) Sei $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Schreibe die Spiegelung $s_v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die durch

$$w \longmapsto w - \frac{2\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v$$

gegeben ist, als (2×2)-Matrix M_v bezüglich der Standardbasis.

(b) Zeige, daß für $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die Matrix $M_u M_v$ eine Drehmatrix um den Winkel 2α oder -2α ist, wobei α der spitze Winkel sei, den die Geraden $H_u = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, u\rangle = 0\}$ und $H_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v\rangle = 0\}$ bilden.

(c) Begründe, warum aus (a) und (b) die obige Aussage für beliebige einfache Wurzeln der Spiegelungsgruppe W folgt.

2. Aufgabe:
In der Vorlesung wurde ein Kriterium zitiert, mit dessen Hilfe man feststellen kann, ob eine Bilinearform positiv definit ist oder nicht. Dieses Kriterium kann relativ einfach bewiesen werden, wenn man die Jacobische Formel für eine symmetrische Bilinearform $B_M(x, x) := x^t M x$ vom Rang r voraussetzt.

(a) Zeige, daß jede symmetrische Bilinearform genau dann positiv definit ist, wenn die Hauptabschnittsdeterminanten D_i für $1 \leq i \leq n$ positiv sind.

(b) Gib ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform an, die nicht positiv semidefinit ist, aber deren Hauptabschnittsdeterminanten alle nicht negativ sind.

Hinweis: Die Jacobische Formel besagt

$$B_M(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k^2}{D_{k-1} D_k},$$

wobei

- D_k die k-te Hauptabschnittsdeterminante von M, d.h. die Determinante der $(k \times k)$-Matrix M_k, die durch Streichen der letzten $n - k$ Zeilen und Spalten entsteht, und
- $Y_k = \sum_{j=k}^{r} D_{k,j} x_j$, wobei $D_{k,j}$ die Determinante der $(k \times k)$-Matrix ist, die man aus M durch streichen der Zeilen $k+1, k+2, \ldots, n$ und Spalten $k, k+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots n$ mit $1 \leq k \leq r$ und $k \leq j \leq r$ erhält.

bezeichnen.

3. Aufgabe: Sei W eine irreduzible kristallografische Spiegelungsgruppe und Φ ein (krsitallographisches) Wurzelsystem von W. Zeige, daß für je zwei Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2 \in W$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

(a) $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\|$,
(a) $\|\varphi_1\| = \sqrt{2}\|\varphi_2\|$ oder $\|\varphi_2\| = \sqrt{2}\|\varphi_1\|$,
(a) $\|\varphi_1\| = \sqrt{3}\|\varphi_2\|$ oder $\|\varphi_2\| = \sqrt{3}\|\varphi_1\|$.

Hinweis: Die Größe $\frac{2\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle}{\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle}$ mag hilfreich sein.

Bemerkung: Der Beweis liefert einen alternativen Beweis für Proposition 2.16