

2. Übungsblatt zu Coxetergruppen

Dr. Carsten Lange

Besprechung in der Vorlesung am 05.12.2007.

1. Aufgabe:

Ziel dieser Aufgabe ist es, nachzuweisen, daß die Coxetergraphen aus Lemma 2.7 und Lemma 2.8 positiv definit bzw. positiv semidefinit sind.

- (a) Zeige, daß die Coxetergraphen vom Typ A_n, B_n, D_n (für $n \geq 3$) und E_6, E_7, E_8, F_4, H_3 und H_4 positiv definit sind.
- (b) Zeige, daß die Matrizen A , die den Coxetergraphen des Typs $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, \tilde{F}_4$ und \tilde{G}_2 assoziiert werden, nicht invertierbar sind.
- (c) Zeige, daß der Pfad mit drei Kanten (Außenkanten haben Gewicht drei und die innere Kante hat Gewicht fünf) und der Pfad mit vier Kanten (eine Außenkante hat Gewicht fünf, alle anderen Kanten haben Gewicht drei) nicht positiv semidefinit sind.

Hinweis: Die folgende Konvention für die kreisfreien Graphen mag hilfreich sein. Bezeichne mit n den Endpunkt des Graphen, dessen inzidente Kante Kantengewicht $3 \leq c \leq 4$ hat und bezeichne den anderen Endpunkt dieser Kante mit $n - 1$. Diese Ecken entsprechen der Zeile und Spalte n bzw. $n - 1$ der assoziierten Matrix A . Bezeichne mit D_{n-1} und D_{n-2} die Hauptabschnittsdeterminante von $2A$, d.h. die Determinante der Matrix bei der die letzte (d.h. n -te) bzw. letzte und vorletzte (d.h. n -te und $(n-1)$ -te) Zeile und Spalte der Matrix $2A$ gestrichen wurde. Nun gilt die Rekursionsformel $\det(2A) = 2D_{n-1} + (c - 2)D_{n-2}$. (Beweise diese Formel, wenn sie benutzt wird.)