# 1. Übungsblatt zu Coxetergruppen

Dr. Carsten Lange

Besprechung in der Vorlesung am 31.10.2007.

**1. Aufgabe:**

Das Ikosaeder ist ein Polytop, dessen Rand aus 12 gleichseitigen Fünfecken, 30 Kanten und 20 Ecken besteht, und der Rand des Dodekaeders besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken, 30 Kanten und 12 Ecken .

(a) Illustriere die Symmetriegruppe des Ikosaeders *oder* des Doedkaeders. Gib drei Spiegelungen an, die die Symmetriegruppe erzeugen.(Auf der Webseite sind Bastelbögen zum Download verlinkt, die bei Bedarf verwendet werden können.)

(b) Begründe, weshalb die orthogonale Gruppe $O(3)$ auf den Fahnen des Ikosaeders beziehungweise des Dodekaeders transitiv operiert.

**2. Aufgabe:**

Sei $x_0$ der Koordinatenursprung des $R^{n+1}$ und $x_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n+1$ der Punkt dessen i-te Koordinate gleich 1 ist und dessen anderen Koordinaten Null sind. Für $1 \leq i \leq n$ sei $s_i$ die Spiegelung an der Hyperebene $H_{v_i}$, die durch $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1}$ und $x_i + x_{i+1}$ geht. Bezeichne die von $s_1, \ldots, s_n$ erzeugte Spiegelungsgruppe $W$.

(a) Wie lauten Normalenvektoren $v_i$ der Hyperebenen $H_{v_i}$, $1 \leq i \leq n$?

(b) Zeige, daß die Spiegelung $s_i$ die i-te und (i+1)-te Koordinate vertauscht und alle anderen Koordinaten invariant läßt. Die Spiegelungsgruppe $W$ ist also isomorph zu $\Sigma_{n+1}$, der Permutationsgruppe auf $n+1$ Elementen.

(c) Gib ein Wurzelsystem $\Phi$ für $W$ in den Fällen $n = 3$ an. Wähle ein positives Wurzelsystem $\Pi$ und bestimme das dazugehörige einfache Wurzelsystem $\Delta$. Schreibe die positiven Wurzeln aus $\Pi$ als Linearkombination Vektoren aus $\Delta$.

(d) Betrachte die orthogonale Abbildung $w : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^4$ gegeben durch $(w, x, y, z) \longmapsto (z, w, y, x)$. Betrachte $\Pi$ aus der vorhergehenden Teilaufgabe und bestimme $w\Pi^+$.

**3. Aufgabe:**

Sei $\Pi \subseteq \Phi$ ein positives Wurzelsystem der Spiegelungsgruppe $W$. Sei $\Delta$ eine Teilmenge von $\Phi$ kleinstmöglicher Kardinalität, so daß sich jedes $\varphi \in \Phi$ als nichtnegative Linearkombination von Elementen aus $\Delta$ schreiben läßt.

Vervollständige den Beweis der Vorlesung für die Aussage, daß $\langle v, w \rangle \leq 0$ für alle $v, w \in \Delta$ gilt.