Skript zur Vorlesung
Topologie I

Carsten Lange, Heike Siebert
Richard-Sebastian Kroll

Faszikel 2
Fehler und Kommentare bitte an
clange@math.fu-berlin.de
Stand: 9. Juli 2010

Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin

Sommersemester 2010

Inhaltsverzeichnis

I.9. Folgen

I.9.0 Motivation: *Für eine Metrik d auf $\mathbb{R}^n$ und $x \in M \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sind uns die folgenden Eigenschaften bereits aus Analysis 1 bekannt:*

(I) $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Folge in* M *mit* $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$.

(II) f *stetig* $\Leftrightarrow \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ *folgt* $f(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

(III) x *Häufungspunkt von* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \exists (x_{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge mit* $x_{k_n} \overset{k_n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Ist solch eine Charakterisierung von Abschluss, Stetigkeit und Häufungspunkt auch in topologischen Räumen möglich? Wir werden schnell feststellen, dass wir im Allgemeinen auf Schwierigkeiten stoßen. Zunächst übertragen wir die essentiellen Begriffe auf allgemeine topologische Räume. Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir im Folgenden eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oft einfach nur mit (x_n) und schreiben $x_k \longrightarrow x$ statt $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$.

I.9.1 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ und (x_n) eine Folge in X. Dann heißt (x_n) ($\mathcal{O}-$)konvergent gegen x_0 (in Zeichen $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$), wenn gilt:*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x_0)\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \in U.$$

Ein Element $x \in X$ heißt Häufungspunkt von (x_n), wenn gilt:

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x_0)\ \forall\ n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : x_n \in U.$$

Aus der Definition eines Häufungspunkts ist sofort zu ersehen, dass x genau dann ein Häufungspunkt der Folge (x_n) ist, wenn jede Umgebung U von x unendlich viele Folgenglieder von (x_n) enthält.

I.9.2 Satz: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $M \subseteq X$, $x \in X$ und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.*

(a) Existiert eine Folge (x_n) in M mit $x_n \longrightarrow x$, so gilt $x \in \overline{M}$.

(b) Ist f stetig in x, so gilt für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \longrightarrow x$ auch $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

(c) Ist (x_n) eine Folge in X und existiert eine Teilfolge von (x_n), die gegen x konvergiert, so ist x ein Häufungspunkt von (x_n).

Beweis:

zu (a): Sei U eine Umgebung von x. Nach Voraussetzung existiert eine Folge (x_n) in M so, dass $x_n \longrightarrow x$, d.h. es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Folglich ist $U \cap M \neq \varnothing$, d.h. $x \in \overline{M}$.

zu (b): Sei (x_n) eine Folge in X mit $x_n \longrightarrow x$, und sei U eine Umgebung von $f(x)$ in Y. Dann ist $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von x. Also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in f^{-1}[U]$ für alle $n \geq n_0$, insbesondere gilt $f(x_n) \in U$ für alle $n \geq n_0$.

zu (c): Folgt direkt aus der Definition von Konvergenz.

□

Die Umkehrungen der drei obigen Aussagen gelten i.A. nicht, wie die folgenden Beispiele zeigen.

I.9.3 Beispiele: *Sei eine überabzählbare Menge X mit der koabzählbaren Topologie $\mathcal{O}_{koabz}$ versehen. Es ist leicht zu sehen, dass für Folgen (x_n) in X und $x \in X$ gilt:*

$$x_n \to x \Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n = x.$$

(a) Sei $x \in X$ und $M := X \setminus \{x\}$. Dann ist $x \in \overline{M}$, denn: für jede Umgebung U von x existiert eine offene Menge Q mit $x \in Q \subseteq U$, d.h. $X \setminus U \subseteq X \setminus Q$ ist höchstens abzählbar. Insbesondere existiert $y \in U$ mit $x \neq y$, d.h. $U \cap M \neq \varnothing$. Also gilt $x \in \overline{M}$.
Angenommen es gäbe eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to x$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x$, d.h. $x \in M$. ↯

(b) Sei $x \in X$ und (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to x$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n = x$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Insbesondere gilt dann $f(x_n) = f(x)$, also $f(x_n) \to f(x)$, für eine beliebige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$.
Betrachte $f := id_X \colon (X, \mathcal{O}_{koabz}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_{dis})$. Dann ist f offensichtlich nicht stetig.

(c) Ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von Satz I.9.2(c) ist in Aufgabe 1 auf Blatt 5 zu finden.

Die Beispiele zeigen, dass der Umgebungsbegriff in topologischen Räumen so allgemein ist, dass mehr "kleine" Umgebungen als Folgenglieder vorhanden sein können. Besser ausgedrückt: im Allgemeinen sind die Umgebungsbasen zu gross.

I.9.4 Satz: *Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $M \subseteq X$, $x \in X$ und $f \colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Besitzt x eine abzählbare Umgebungsbasis, dann gelten:*

(a) Ist $x \in \overline{M}$, so existiert eine Folge (x_n) in M mit $x_n \longrightarrow x$.

(b) Gilt für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \longrightarrow x$ auch $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, so ist f stetig in x.

(c) Ist x Häufungspunkt einer Folge (x_n), so existiert eine Teilfolge von (x_n), die gegen x konvergiert.

Um den Satz beweisen zu können benötigen wir das folgende Lemma.

I.9.5 Lemma: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und (x_n) eine Folge in X. Weiter sei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x.*

(a) $x_n \longrightarrow x \Longleftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n \in B$.

(b) Ist $\mathcal{B}$ abzählbar, so existiert eine Umgebungsbasis $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $V_{n+1} \subseteq V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

zu (a): Folgt aus den Definitionen von Konvergenz und Umgebungsbasis.

zu (b): Sei $\mathcal{B} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Setze $V_n := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist $V_n \in \mathcal{U}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $V_n \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist

$\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis. Nach Konstruktion gilt $V_{n+1} \subseteq V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

□

Beweis von Satz I.9.4: Wähle eine Umgebungsbasis $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von x mit $V_{n+m} \subseteq V_n$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

zu (a): Da $x \in \overline{M}$, gilt $V_n \cap M \neq \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x_n \in V_n \cap M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also eine Folge (x_n) in M. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt nun $x_{n+m} \in V_{n+m} \subseteq V_n$. Also $x_n \to x$ nach Lemma I.9.5.

zu (b): Angenommen f ist nicht stetig in x. Dann existiert eine Umgebung W von $f(x)$, so dass $f^{-1}[W]$ keine Umgebung von x ist. Es folgt $V_n \nsubseteq f^{-1}[W]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es existiert $x_n \in V_n \setminus f^{-1}[W]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $x_{n+m} \in V_{n+m} \subseteq V_n$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $x_n \to x$. Weiter gilt $f(x_n) \notin W$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(f(x_n))$ konvergiert nicht gegen $f(x)$. ↯

zu (c): Definiere induktiv eine streng monoton wachsende Funktion $\nu\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $x_{\nu(n)} \in V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Sei $n = 1$. Nach Definition eines Häufungspunktes gilt, dass für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ derart existiert, dass $x_m \in U$ gilt. Also existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $x_m \in V_1$. Setze nun $\nu(n) = \nu(1) = m$.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\nu(k)$ definiert für alle $k \leq n$. Da x ein Häufungspunkt ist, existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \nu(n) + 1$ und $x_m \in V_{n+1}$. Setze $\nu(n+1) := m$.

Nach Lemma I.9.5 (a) gilt dann $x_{\nu(n)} \to x$.

□

I.9.6 Folgerung: *Erfüllt ein topologischer Raum X das 1.Abzählbarkeitsaxiom, so gelten $(I) - (III)$ aus I.9.0. Insbesondere gilt dies für metrisierbare Räume.*

I.10. Filter

Wir haben gesehen, dass der Begriff der Folge/Folgenkonvergenz Probleme bereitet, wenn es “mehr Umgebungsbasiselemente als Folgenglieder“ gibt. Hier setzen Ideen zur Verallgemeinerung des Folgenbegriffs an. Eine Möglichkeit ist, die Indexmenge einer Folge zu vergrössern, d.h. statt $\mathbb{N}$ allgemeine Mengen I (versehen mit einer Relation) zuzulassen. Dieser Ansatz führt zum Begriff “Netz“ (oder “Moore-Smith Folge“), für den sich der Konvergenzbegriff direkt übertragen lässt.
Ein anderer Verallgemeinerungsansatz erschliesst sich, wenn man den Konvergenzbegriff direkt an durch Inklusion gerichtete Teilmengensysteme (wie es die Umgebungssysteme und -basen sind) anpasst. Diese Idee führt zum Begriff des Filters.

I.10.1 Definition: *Sei X eine Menge.*

(a) Ein Filter auf X ist eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}(X)$ mit
  (F1) $\forall F \in \mathcal{F}\ \forall G \subseteq X$ mit $F \subseteq G \Rightarrow G \in \mathcal{F}$,
  (F2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
  (F3) $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

(b) Eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}(X)$ heißt Filterbasis auf X, wenn gelten
  (FB1) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{B}\ \exists F_3 \in \mathcal{B}$ mit $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$,
  (FB2) $\varnothing \notin \mathcal{B}$.

(c) Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt frei, wenn $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing$, andernfalls heißt er fixiert.

I.10.2 Beispiele:

1. *Sei M eine nicht-leere Teilmenge der Menge X. Dann ist $\{M\}$ eine Filterbasis und $\mathcal{F} = \{Q \subseteq X \mid M \subseteq Q\}$ ein Filter auf X. Offensichtlich ist $\mathcal{F}$ fixiert.*
2. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathcal{U}(x)$ ein Filter, der sogenannte Umgebungsfilter von x, und eine Filterbasis auf X. Eine Umgebungsbasis ist auch eine Filterbasis, jedoch im Allgemeinen kein Filter.*
3. *Sei (x_n) eine Folge in X und $E_n := \{x_m \mid m \geq n\}$. Die Mengen E_n heißen die Endstücke der Folge (x_n). Dann ist $\mathcal{B}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Filterbasis, die sogenannte Endstück-Filterbasis von (x_n). Die Menge $\mathcal{F}_{\mathcal{B}((x_n))} := \{F \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B}((x_n)) : B \subseteq F\}$ ist ein Filter. Man nennt ihn den von (x_n) erzeugten Filter.*
   Zwei Folgen, die sich nur in endlich vielen Folgengliedern unterscheiden, erzeugen den selben Filter.

Die Beispiele zeigen einige einfache Eingenschaften von Filtern und Filterbasen auf.

I.10.3 Satz und Definition: *Seien X eine Menge und $\mathcal{B}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

(a) Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis, so ist $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} := \{F \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$ ein Filter. Man nennt $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ den durch $\mathcal{B}$ erzeugten Filter.

(b) Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, so ist $\mathcal{F}$ auch eine Filterbasis auf X mit $\mathcal{F}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

(c) $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Filter, wenn $\mathcal{F}$ eine Filterbasis ist, die (F1) erfüllt.

Beweis: Folgt direkt aus den Definitionen für Filter und Filterbasis.

Filter und Filterbasen stellen eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffs für topologische Räume dar. Wir übertragen nun die Begriffe Konvergenz und Häufungspunkt auf Filter und Filterbasen.

I.10.4 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.*
(a) Eine Filterbasis $\mathcal{B}$ auf X konvergiert gegen x (in Zeichen $\mathcal{B} \to x$), wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $F \in \mathcal{B}$ mit $F \subseteq U$ gibt. Man nennt x Grenzwert oder Limespunkt von $\mathcal{B}$.
(b) Der Punkt x heißt Häufungspunkt (oder Berührpunkt) von $\mathcal{B}$, wenn $x \in \overline{B}$ für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt, d.h. wenn $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$.

I.10.5 Bemerkung: *Da jeder Filter auch eine Filterbasis ist, sind die Begriffe Konvergenz und Häufungspunkt auch für Filter erklärt. Offensichtlich gilt für eine Filterbasis $\mathcal{B}$ und den von ihr erzeugten Filter $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$: $\mathcal{B} \to x \iff \mathcal{F}_{\mathcal{B}} \to x$.*

I.10.6 Beispiele: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*
1. *Ist $\mathcal{O}$ die triviale Topologie auf X, so gilt $\{M\} \to x$ für alle $M \subseteq X, M \neq \varnothing, x \in X$.*
   Für einen beliebigen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ und $\varnothing \neq M \subseteq X$ ist $\overline{M}$ die Menge der Häufungspunkte sowohl von $\{M\}$ als auch von dem von $\{M\}$ erzeugtem Filter.
2. *Ist $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von $x \in X$, so gilt $\mathcal{B} \to x$. Insbesondere gilt $\mathcal{U}(x) \to x$.*
3. *Ist (x_n) eine Folge in X und $\mathcal{B}((x_n))$ die entsprechende Endstück-Filterbasis, so konvergiert $\mathcal{B}((x_n))$ gegen x genau dann, wenn (x_n) gegen x konvergiert. Dies folgt aus den Definitionen der Folgenkonvergenz, der Folgen Endstücke und der Filterkonvergenz.*
   Desweiteren ist x Häufungspunkt von (x_n) genau dann, wenn x Häufungspunkt von $\mathcal{B}((x_n))$ ist. Auch dies folgt unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen.

Es besteht eine enge Beziehung zwischen Filterkonvergenz und Umgebungssystemen, wie es in Beispiel I.10.6(2) schon angedeutet ist.

I.10.7 Lemma: *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann gilt:*

$$\mathcal{F} \longrightarrow x \iff \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F} \iff \exists \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \text{ Umgebungsbasis von } x : \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{F}.$$

Existiert eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ von x mit $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$, so konvergiert $\mathcal{B}$ gegen x. Die Umkehrung gilt nicht.

Beweis: Konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x, so existiert zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq U$. Nach (F1) ist dann auch $U \in \mathcal{F}$. Gilt umgekehrt $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$, so erfüllt $\mathcal{F}$ die Konvergenzbedingung trivialerweise. Die weiteren Implikationen folgen analog.
Betrachte nun den Fall $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{nat}$. Dann ist $\mathcal{B} := \{(0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$

eine Filterbasis auf X, die gegen 0 konvergiert. Weiter gilt $U \notin \mathcal{B}$ für alle Umgebungen U von 0. $\square$

I.10.8 Bemerkung: *Sei X eine Menge.*

(a) Ist $M \subseteq X$ und $\mathcal{B}$ Filterbasis auf M, so ist $\mathcal{B}$ insbesondere eine Filterbasis auf X.
Achtung : Diese Aussage gilt wegen (F1) nicht für Filter, d.h. Filter auf M sind Filterbasen auf X, aber nicht notwendigerweise Filter auf X.

(b) Ist $M \subseteq X$, $\mathcal{F}$ Filter auf X, $\mathcal{F}' := \{F \cap M \mid F \in \mathcal{F}\}$. Dann ist $\mathcal{F}'$ ein Filter auf M genau dann, wenn $F \cap M \neq \varnothing$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt. Vergleiche dazu Aufgabe 2 auf Übungsblatt 5.

(c) Ist X ein topologischer Raum, $M \subseteq X$, $x \in X$ und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf M, so verstehen wir Filterkonvergenz auf M als Filterkonvergenz bezüglich des Unterraums M.

I.10.9 Satz: *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

(a) $x \in \overline{M}$,
(b) es existiert eine Filterbasis $\mathcal{B}$ auf M mit $\mathcal{B} \longrightarrow x$,
(c) es existiert ein Filter $\mathcal{F}^M$ auf M mit $\mathcal{F}^M \longrightarrow x$,
(d) es existiert ein Filter $\mathcal{F}^X$ auf X mit $M \in \mathcal{F}^X$ und $\mathcal{F}^X \longrightarrow x$.

Beweis:
(a) ⇒ (b) : Sei $x \in \overline{M}$. Setzte $\mathcal{B} := \{U \cap M \mid U \in \mathcal{U}(x)\}$. Es gilt $U \cap M \neq \varnothing$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$, da $x \in \overline{M}$, also gilt (FB2).
Für $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ gilt $(U_1 \cap M) \cap (U_2 \cap M) = (U_1 \cap U_2) \cap M \in \mathcal{B}$, d.h. es gilt (FB1).
Damit ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf M. Für $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $U \cap M \subseteq U$ und $U \cap M \in \mathcal{B}$, also $\mathcal{B} \to x$.
(b) ⇒ (c) : Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf M, die gegen x konvergiert, und sei $\mathcal{F}^M$ der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter auf M. Da $\mathcal{B}$ gegen x konvergiert, konvergiert auch $\mathcal{F}^M$ gegen x.
(c) ⇒ (d) : Sei $\mathcal{F}^M$ ein Filter auf M, der gegen x konvergiert. Dann ist $\mathcal{F}^M$ eine Filterbasis auf X. Sei $\mathcal{F}^X$ der von $\mathcal{F}^M$ erzeugte Filter auf X. Dann konvergiert $\mathcal{F}^X$ offensichtlich ebenfalls gegen x. Da für eine beliebige Umgebung U von x ein $F \in \mathcal{F}^M \subseteq \mathcal{F}^X$ so existiert, dass $F \subseteq U \cap M \subseteq M$ gilt, folgt $M \in \mathcal{F}^X$ nach (F1).
(d) ⇒ (a) : Sei $\mathcal{F}^X$ ein gegen x konvergierender Filter auf X, der M enthält. Sei U eine Umgebung von x. Dann existiert $F \in \mathcal{F}^X$ mit $F \subseteq U$. Weiter ist $F \cap M \neq \emptyset$, da $M \in \mathcal{F}^X$ gilt. Also gilt $U \cap M \neq \emptyset$. $\square$

Der Beweis zeigt noch einmal, dass man Konvergenzaussagen über Filterbasen und die entsprechenden erzeugten Filter leicht ineinander überführen kann, wie schon in Bemerkung I.10.5 festgehalten wurde. Im Folgenden führen wir die

entsprechenden Äquivalenzen nicht mehr explizit an.
Bildet man einen Filter mittels einer Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen den Mengen X und Y ab, so ist das Bild des Filters im Allgemeinen kein Filter. Aus der Definition für Filterbasen und den Eigenschaften von Abbildungen folgt jedoch sofort das folgende Lemma.

I.10.10 Lemma und Definition: *Seien X und Y Mengen, $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X. Dann ist $f(\mathcal{B}) := \{f[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine Filterbasis auf Y, die sogenannte Bildfilterbasis von $\mathcal{B}$ unter f. Der von $f(\mathcal{B})$ erzeugte Filter heißt Bildfilter von $\mathcal{B}$ unter f.*

Wir können nun ein Stetigkeitskriterium mittels Filtern formulieren.

I.10.11 Satz: *Seien $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Die Abbildung f ist genau dann stetig in x, wenn für jede gegen x konvergierende Filterbasis $\mathcal{B}$ auf X die Bildfilterbasis $f(\mathcal{B})$ auf Y gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis:
$\Rightarrow$: Sei V eine Umgebung von $f(x)$ in Y. Dann ist $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x in X. Da $\mathcal{B}$ gegen x konvergiert, existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq f^{-1}[V]$, also $f[B] \subseteq V$. Es folgt $f(\mathcal{B}) \to f(x)$.
$\Leftarrow$: Sei V eine Umgebung von $f(x)$ in Y. Nach Lemma I.10.7 gilt $\mathcal{U}(x) \to x$ und somit nach Voraussetzung $f(\mathcal{U}(x)) \to f(x)$. Also existiert $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f[U] \subseteq V$. Es folgt $U \subseteq f^{-1}[V]$. Da $U \in \mathcal{U}(x)$, folgt $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}(x)$, also ist f stetig in x. $\square$

Wenn wir Folgen betrachten, so ist der Begriff der Teilfolge oft hilfreich. Wir wollen dieses Konzept nun auf Filter übertragen.

I.10.12 Definition: *Seien X eine Menge und $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ Filter auf X.*
(a) Gilt $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, so heißt $\mathcal{F}_2$ feiner als $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_1$ gröber als $\mathcal{F}_2$.
(b) $\mathcal{F}$ heißt Ultrafilter, wenn für alle Filter $\mathcal{F}'$ mit $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ schon $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ gilt.

I.10.13 Beispiele:
1. *Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{F}_x := \{F \subseteq X \mid x \in F\}$ ein Ultrafilter, denn: $\mathcal{F}_x$ ist ein Filter (vgl. Beispiel I.10.2, 1.). Angenommen es existiert ein Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}_x \subsetneqq \mathcal{F}$, dann existiert $G \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_x$, d.h. $x \notin G$. Weiter ist $\{x\} \in \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{F}$, also nach (F2) $\varnothing = F \cap G \in \mathcal{F}$.* ↯
2. *Sei (x_n) eine Folge in X, (x_{n_l}) eine Teilfolge von (x_n), sowie $\mathcal{F}_{\mathcal{B}(x_n)}$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{B}(x_{n_l})}$ die entsprechenden erzeugten Filter. Dann gilt $\mathcal{F}_{\mathcal{B}(x_n)} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{B}(x_{n_l})}$, denn ist $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}(x_n)}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\{x_m \mid m \geq n\} \subseteq F$. Dann existiert auch ein $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $\{x_{n_m} \mid m \geq k\} \subseteq F$ und somit $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}(x_{n_l})}$. Es gilt also: Teilfolgen erzeugen feinere Filter.*

I.10.14 Satz: *Sei X eine Menge.*
(a) Jeder Filter $\mathcal{F}_0$ auf X ist in einem Ultrafilter enthalten.

(b) *Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X, so gilt:*
$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x \in X : \mathcal{F} = \mathcal{F}_x := \{F \subset X \mid x \in F\}$.
(c) *Eine Filterbasis $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter auf X genau dann, wenn $M \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus M \in \mathcal{F}$ für alle $M \subseteq X$ gilt.*

Beweis:

zu (a) : Wir zeigen die Aussage mit Hilfe des Zornschen Lemmas.
Sei $\mathcal{F}_0$ ein Filter auf X und $\mathcal{M} := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{F} \text{ Filter}, \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}\}$. Dann ist $(\mathcal{M}, \subseteq)$ telweise geordnet (d.h. $\subseteq$ ist eine Halbordnung auf $\mathcal{M}$). Wegen $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Sei $\mathcal{K}$ eine nicht-leere total geordnete (d.h. linear geordnete) Teilmenge von $\mathcal{M}$.
Setze $\mathcal{G} := \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{K}} \mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid \exists \mathcal{F} \in \mathcal{K} : F \in \mathcal{F}\}$. Dann gilt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ für alle $\mathcal{F} \in \mathcal{K}$. Damit ist $\mathcal{G}$ ein Filter, denn:
(F1) Für $G \in \mathcal{G}$ gilt $G \in \mathcal{F}$ für ein $\mathcal{F} \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{F}$ ein Filter ist, ist auch jede Menge $G' \supseteq G$ Element von $\mathcal{F}$, also von $\mathcal{G}$.
(F2) Seien $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, d.h. es existieren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{K}$ mit $G_1 \in \mathcal{F}_1, G_2 \in \mathcal{F}_2$. Da $\mathcal{K}$ total geordnet ist, können wir o.B.d.A. $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ annehmen. Also gilt $G_1, G_2 \in \mathcal{F}_2$ und somit $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{G}$.
(F3) klar.
Nach dem Zornschen Lemma existiert dann ein maximales Element $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$. Insbesondere gelten: $\mathcal{F}$ ist ein Filter auf X, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ und für alle Filter $\mathcal{F}'$ auf X mit $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ gilt $\mathcal{F}' \in \mathcal{M}$ und somit $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. Also ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter.

zu (b) : Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X.
$\Rightarrow$: Wähle $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \neq \varnothing$, also $x \in F$ für alle $F \in \mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_x$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gilt somit schon $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$.
$\Leftarrow$: Sei $x \in X$ mit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$, also $x \in F$ für alle $F \in \mathcal{F}$, also $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$.

zu (c) :
$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X, $M \subseteq X$. Angenommen es existieren F_1, F_2 mit $F_1 \subseteq M, F_2 \subseteq X \setminus M$. Dann gilt $\mathcal{F} \ni F_1 \cap F_2 = \varnothing$, was zu einem Widerspruch führt. Also gilt entweder $F \cap M \neq \varnothing$ für alle $F \in \mathcal{F}$ oder $F \cap X \setminus M \neq \varnothing$ für alle $F \in \mathcal{F}$. O.B.d.A. gelte $F \cap M \neq \varnothing$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Dann ist $\mathcal{B} := \{B \subseteq X \mid \exists F \in \mathcal{F} : B = F \cap M\}$ eine Filterbasis und $\mathcal{F}' = \{F \subseteq X \mid \exists G \in \mathcal{F} : F \supseteq G \cap M\}$ der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter. Es gilt insbesondere $M \in \mathcal{F}', F \in \mathcal{F}'$ für alle $F \in \mathcal{F}$ wegen (F1). Somit ist $\mathcal{F}'$ feiner als der Ultrafilter $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ und somit $M \in \mathcal{F}$.
$\Leftarrow$: Angenommen $\mathcal{G}$ ist ein echt feinerer Filter als $\mathcal{F}$. Dann existiert ein $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Nach Voraussetzung ist dann $X \setminus G \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Es folgt, dass $\emptyset = G \cap X \setminus G \in \mathcal{G}$.$\lightning$

$\square$

I.10.15 Bemerkung: *Zu jeder Filterbasis $\mathcal{B}$ existiert ein Ultrafilter, der $\mathcal{B}$ enthält, da der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter in einem Ultrafilter enthalten ist.*

Wir können nun eine Entsprechung zu I.9.0 (III) formulieren.

I.10.16 Satz: *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein toplogischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Dann ist x ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ genau dann, wenn es einen Filter $\mathcal{G}$ auf X gibt, der feiner als $\mathcal{F}$ ist und gegen x konvergiert.*

Beweis:

$\underline{\Rightarrow}$: Setze $\mathcal{B} := \{U \cap F \mid U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}$. Es ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, da $X \in \mathcal{U}(x)$. Weiter ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis, denn:

(FB1) Für $(U_1 \cap F_1), (U_2 \cap F_2) \in \mathcal{B}$ gilt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x), F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, also $(U_1 \cap F_1) \cap (U_2 \cap F_2) = (U_1 \cap U_2) \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{B}$.

(FB2) Es ist $x \in \overline{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$, also $U \cap F \neq \varnothing$ für alle $U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}$, also $\varnothing \notin \mathcal{B}$.

Sei $\mathcal{G}$ der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter. Dann ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Weiter gilt $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{G}$ wegen (F1). Es folgt $\mathcal{G} \to x$ nach Lemma I.10.7.

$\underline{\Leftarrow}$: Sei $\mathcal{G}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \to x$. Dann gilt $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{G}$ nach Lemma I.10.7. Für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und $F \in \mathcal{F}$ gilt $U, F \in \mathcal{G}$, also $U \cap F \in \mathcal{G}$, also $U \cap F \neq \varnothing$. Damit ist $x \in \overline{F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und somit ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$.

$\square$

I.10.17 Korollar: *Ein Ultrafilter konvergiert gegen jeden seiner Häufungspunkte.*

Zum Abschluss wollen wir das Verhalten von Filtern auf Räumen betrachten, die die Initialtopologie tragen. Insbesondere interessieren wir uns auch hier wieder für Produkträume.

I.10.18 Satz: *Seien X eine Menge, I eine Indexmenge, $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologische Räume und $f_i \colon X \longrightarrow X_i$ Abbildungen für alle $i \in I$. Weiter sei $\mathcal{O}_X$ die Initialtopologie auf X bzgl. der $f_i, i \in I$, und $\mathcal{F}$ eine Filterbasis auf X, sowie $x \in X$. Dann konvergiert $\mathcal{F}$ genau dann gegen x, wenn für alle $i \in I$ die Bildfilterbasis $f_i(\mathcal{F})$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

Beweis:

$\underline{\Rightarrow}$: Konvergiert $\mathcal{F}$ gegen x, so konvergiert nach Satz I.10.11 auch $f_i(\mathcal{F})$ gegen $f_i(x)$, da f_i für alle $i \in I$ bzgl. der Initialtopologie stetig ist.

$\underline{\Leftarrow}$: Betrachte $\mathcal{B} := \left\{\bigcap_{k \in K} f_k^{-1}[U_k] \;\middle|\; K \subset I \text{ endlich}, U_k \in \mathcal{U}(f_k(x))\right\}$.
Wir zeigen:

(a) $\mathcal{B}$ ist eine Umgebungsbasis von x,

(b) $\forall B \in \mathcal{B}\; \exists F \in \mathcal{F} : F \subseteq B$.

Daraus folgt sofort $\mathcal{F} \longrightarrow x$ nach den Definitionen von Konvergenz und Umgebungsbasis.

<u>*zu(a)*</u> : Sei $U \subseteq X$ eine Umgebung von x. Nach Satz I.5.4 ist durch die Menge $\mathcal{S} = \left\{f^{-1}[O] \;\middle|\; O \in \mathcal{O}_i\right\}$ eine Subbasis von $\mathcal{O}_X$ gegeben. Also existieren $k \in \mathbb{N}$ und $Q_{i_j} \in \mathcal{O}_{i_j}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ so, dass $x \in Q := \bigcap_{l=1}^{k} f_{i_l}^{-1}[Q_{i_l}] \subseteq U$. Weiter gilt $f_{i_j}(x) \in Q_{i_j}$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$, d.h. $Q_{i_j} \in \mathcal{U}(f_{i_j}(x))$. Damit ist nach Definition $Q \in \mathcal{B}$, und es gilt

$x \in Q \subseteq U$. Somit ist $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x.

zu(b) : Sei $B \in \mathcal{B}$, also $B = \bigcap_{k \in K} f_k^{-1}(U_k)$ für eine endliche Teilmenge K von I und $U_k \in \mathcal{U}(f_k(x))$ für alle $k \in K$. Nach Voraussetzung konvergiert $f_k(\mathcal{F})$ gegen $f_k(x)$ für alle $k \in K$, also existieren $F_k \in \mathcal{F}$ mit $f_k(F_k) \subseteq U_k$ für all $k \in K$. Nach (FB1) finden wir ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq \bigcap_{k \in K} F_k$. Dann gilt $F \subseteq \bigcap_{k \in K} f_k^{-1}(U_k) = B$.

□

I.10.19 Korollar: *Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologische Räume für alle i aus einer Indexmenge I, und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie, weiter sei $x \in X$. Eine Filterbasis $\mathcal{F}$ auf X konvergiert genau dann gegen x, wenn $p_i(\mathcal{F})$ gegen $p_i(x)$ konvergiert für alle $i \in I$ gilt.*

I.11. Trennungseigenschaften

I.11.0 Vorbemerkung: *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien A_1, A_2 abgeschlossene, disjunkte Teilmengen von X. Dann existieren disjunkte Umgebungen U_1 von A_1 und U_2 von A_2.*

Beweisskizze: Es gilt $A_1 \subseteq X \setminus A_2$, und $X \setminus A_2$ ist offen. Wähle für alle $a \in A_1$ ein $\varepsilon_a > 0$ mit $B_d(a, 2\varepsilon_a) \subseteq X \setminus A_2$. Setze $U_1 := \bigcup_{a \in A_1} B_d(a, \varepsilon_a)$. Konstruiere U_2 analog, dann erfüllen U_1 und U_2 die gewünschte Bedingung.

Hier haben wir ausgenutzt, dass wir in metrischen Räumen beliebig kleine offene Mengen zur Verfügung haben. Trägt X die triviale Topologie, so scheitern solche Argumente. Für beliebige topopgische Räume betrachtet man daher unterschiedlich starke Trennungseigenschaften.

I.11.1 Definition: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Der Raum X heißt*

- *T_0-Raum, wenn von je zwei verschiedene Punkten aus X einer eine Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält,*
- *T_1-Raum, wenn von je zwei verschiedene Punkten aus X jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält,*
- *T_2-Raum (oder Hausdorff-Raum), wenn je zwei Punkte disjunkte Umgebungen besitzen,*
- *T_3-Raum, wenn jede abgeschlossene Teilmenge A von X und jedes $x \in X \setminus A$ disjunkte Umgebungen besitzen,*
- *$T_{3\frac{1}{2}}$-Raum (oder auch T_{3a}-Raum), wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X und jedem $x \in X \setminus A$ eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow [0;1]$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f_{|A} \equiv 0$, d.h. $f[A] \subseteq \{0\}$,*
- *T_4-Raum, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X disjunkte Umgebungen besitzen.*

Die aufgelisteten Eigenschaften nennt man Trennungseigenschaften oder Trennungsaxiome.

Man spricht oft auch davon, dass Punkte bzw. Mengen durch Umgebungen bzw. Funktionen getrennt werden, wenn die entsprechenden Trennungseigenschaften erfüllt sind.
Die verschiedenen Trennungsaxiome sind oft uneinheitlich definiert, und es gibt durchaus noch weitere Trennungseigenschaften. Es ist also Vorsicht geboten, wenn man verschiedene Quellen nutzt. Wir haben T_2-Räume schon in Abschnitt I.7 kennen gelernt. Die dortige Definition betrachtet nur offene Umgebungen, was uns Anlass für die folgende Bemerkung gibt.

I.11.2 Bemerkung:

1. *Wir erhalten äquivalente Bedingungen für die Trennungseigenschaften, wenn wir statt Umgebungen nur offene Umgebungen betrachten.*
2. *I.11.0 zeigt: metrische Räume sind $T4$-Räume.*

Zwischen den verschiedenen Trennungsaxiomen bestehen diverse Beziehungen. Wir betrachten dazu einige Beispiele.

I.11.3 Beispiele:

(a) *Sei* $X := \{1, 2\}$ *und* $\mathcal{O} := \{\varnothing, X, \{1\}\}$. *Dann ist* $(X, \mathcal{O})$ *ein* T_0*- aber kein* $T1$*-Raum.*

(b) *Sei* X *eine nicht endliche Menge versehen mit der kofiniten Topologie. Dann ist* X *ein* T_1*- aber kein* T_2*-Raum (vgl. Übung 4/3b).*

(c) *Sei* $X := \{1, 2\}$ *und* $\mathcal{O} := \{\varnothing, X\}$. *Dann ist* $(X, \mathcal{O})$ *ein* T_3*-, aber weder ein* T_0*- noch ein* T_2*-Raum.*

(d) *Der Raum* $(X, \mathcal{O})$ *mit* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *und* $\mathcal{O} = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ *ist ein* T_4*-Raum, denn die abgeschlossenen Mengen von* X *sind* $\varnothing, X$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4\}, \{4\}$. *D.h. für alle abgeschlossenen und disjunkten Mengen* $A, B \subseteq X$ *gilt* $A = \varnothing$ *oder* $B = \varnothing$.

Die einzige Umgebung von $\{4\}$ *ist* X, *also ist* T_1 *verletzt (betrachte etwa* $x := 4, y := 1$*) und* T_3 *verletzt (betrachte* $A := \{4\}, x := 1$*).*

(e) *Metrische Räume sind* T_0*-,*T_1*-,*T_2*-,*T_3*-,*$T_(3\frac{1}{2})$*- und* T_4*-Räume.*

Die Beweisidee aus der Vorbemerkung erlaubt die in den entsprechenden Trennungsaxiomen geforderten Umgebungen zu finden. Um $T_{3\frac{1}{2}}$ *zu zeigen, betrachte für* $A \subseteq X$ *abgeschlossen,* $x \in X \setminus A$ *die Funktion*

$f\colon X \longrightarrow [0; 1], y \longmapsto 1 - \frac{2d(x,y)}{d(x,y)+d(x,A)}$.

Wir können nun einige einfache Beobachtungen zusammenfassen.

I.11.4 Beobachtung:

(1) *Jeder* T_1*-Raum ist ein* T_0*-Raum, aber nicht umgekehrt.*

(2) *Jeder* T_2*-Raum ist ein* T_1*-Raum, aber nicht umgekehrt.*

(3) T_3*-Räume sind im Allgemeinen weder* T_2*- noch* T_1*- Räume (noch* T_0*-Räume).*

(4) T_4*-Räume sind im Allgemeinen weder* T_1*- noch* T_3*- Räume (noch* T_0*-Räume).*

(5) *Jeder* $T_{3\frac{1}{2}}$*-Raum ist ein* T_3*-Raum, denn:*

Seien $A \subseteq X$ *abgeschlossen,* $x \in X \setminus A$ *und* $f\colon X \longrightarrow [0; 1]$ *stetig mit* $f(x) = 0$ *und* $f_{|A} \equiv 1$. *Setze* $O_1 := f^{-1}[[0; \frac{1}{2})]]$ *und* $O_2 := f^{-1}[(\frac{1}{2}; 1]]$. *Die Mengen* O_1, O_2 *sind offen in* X *und trennen* x *und* A.

Es gilt also: $T0 \Leftarrow T1 \Leftarrow T2$ *und* $T3 \Leftarrow T3\frac{1}{2}$.

Wir werden später noch Kombinationen von Trennungseigenschaften sehen, die weitere Implikationen erlauben. Zunächst betrachten wir äquivalente Bedingungen für die Trennungseigenschaften.

I.11.5 Satz: *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X *ist ein* T_1*-Raum.*

(ii) *Jede* 1*-elementige Teilmenge von* X *ist abgeschlossen.*

(iii) *Jede Teilmenge* M *von* X *ist der Schnitt aller ihrer Umgebungen.*

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Sei $x \in X$. Für jedes $y \neq x$ existiert eine Umgebung und insbesondere eine offene Menge Q mit $y \in Q$ und $Q \subseteq X \setminus \{x\}$. Also können wir $X \setminus \{x\}$ als Vereinigung offener Mengen darstellen, d.h. $X \setminus \{x\}$ ist offen. Folglich ist $\{x\}$ abgeschlossen.

$\underline{(ii) \Rightarrow (iii):}$ Sei $M \subseteq X$. Offensichtlich liegt M im Schnitt aller Umgebungen von M. Weiter ist für alle $x \notin M$ die Menge $X \setminus \{x\}$ Umgebung von M, da $\{x\}$ abgeschlossen ist. Also liegt x nicht im Schnitt aller Umgebungen von M, woraus die Behauptung folgt.

$\underline{(iii) \Rightarrow (i):}$ Sei $x \in X$, also ist die Menge $\{x\}$ der Schnitt aller ihrer Umgebungen. Folglich existiert für $y \in X \setminus \{x\}$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $y \notin U$.

□

Der folgende Satz fasst Ergebnisse aus vorigen Abschnitten sowie Übungsaufgaben zusammen.

I.11.6 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*
(a) X ist hausdorffsch.
(b) Für jedes $x \in X$ ist die Menge $\{x\}$ der Durchschnitt aller ihrer abgeschlossenen Umgebungen.
(c) Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, so ist x der einzige Häufungspunkt von $\mathcal{B}$.
(d) Keine Filterbasis auf X hat mehr als einen Grenzwert.
(e) Kein Filter auf X hat mehr als einen Grenzwert.
(f) Die Diagonale $\{(x, x) \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen im Produktraum $X \times X$.

Beweis: Siehe Satz I.7.4 und Übungsaufgaben 4/4 und 6/2.

I.11.7 Bemerkung: *Die Aussagen für Filter gelten im Allgemeinen nicht für Folgen. Ein topologischer Raum muss kein T_2-Raum sein, wenn jede konvergente Folge genau einen Grenzwert hat. Betrachte dazu $(X, \mathcal{O})$, wobei X eine überabzählbare Menge und $\mathcal{O}$ die koabzählbare Topologie ist. Die konvergenten Folgen sind bis auf endlich viele Folgenglieder konstant (vgl. Beispiel I.9.3). Insbesondere hat jede konvergente Folge genau einen Grenzwert.*
Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und sind U_x, U_y Umgebungen von x bzw. y, dann existieren offene Mengen $Q_x \subseteq U_x$ und $Q_y \subseteq U_y$, d.h. $X \setminus Q_x$ und $X \setminus Q_y$ sind abzählbar. Insbesondere gilt $Q_y \subsetneqq X \setminus Q_x$, da Q_y überabzählbar ist, d.h. $Q_y \cap Q_x \neq \varnothing$ und somit $U_x \cap U_y \neq \varnothing$. Der Raum $(X, \mathcal{O})$ ist also kein T_2-Raum.

I.11.8 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann ein T_3-Raum, wenn für jeden Punkt aus X die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden.*

Beweis:
$\underline{\Rightarrow:}$ Seien $x \in X$, $U \in \mathcal{U}(x)$ und $Q \in \mathcal{O}$ mit $x \in Q \subseteq U$. Insbesondere gilt $x \notin X \setminus Q$, und $X \setminus Q$ ist abgeschlossen. Dann existieren offene, disjunkte Mengen $Q_1, Q_2 \in \mathcal{O}$ mit $x \in Q_1$ und $X \setminus Q \subseteq Q_2$. Also gilt $x \in Q_1 \subseteq X \setminus Q_2 \subseteq X \setminus (X \setminus Q) = Q \subseteq U$, d.h. die abgeschlossene Umgebung $X \setminus Q_2$ von x ist in U enthalten.
$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $x \in X$ und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $x \notin A$. Dann ist $X \setminus A$ eine Umge-

bung von x. Nach Voraussetzung existiert eine abgeschlossene Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $x \in V \subseteq X \setminus A$. Somit ist $X \setminus V$ eine offene Umgebung von A. Da V eine Umgebung von x ist und $V \cap (X \setminus V) = \varnothing$ gilt, folgt die Behauptung.

□

I.11.9 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn $\mathcal{B} = \left\{ f^{-1}[U] \;\middle|\; U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen bzgl. } \mathcal{O}_{nat}, f\colon X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \right\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ ist.*

Beweis:

$\Rightarrow$: Es gilt offensichtlich $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$. Wir zeigen nun: für alle $x \in X$ enthält $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x. Die Behauptung folgt dann, da jede offene Menge Umgebung aller ihrer Punkte ist.
Sei $x \in X$ und V eine offene Umgebung von x, d.h. $X \setminus V$ ist abgeschlossen und $x \notin X \setminus V$. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow [0;1] \subset \mathbb{R}$ mit $f[X \setminus V] \subseteq \{0\}$ und $f(x) = 1$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$ eine offene Umgebung von x und $f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] \subseteq V$. Da $f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] \in \mathcal{B}$ gilt, folgt die Behauptung.

$\Leftarrow$: Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, und sei $x \in X$ mit $x \notin A$. Die Menge $X \setminus A$ ist offen, also existiert nach Voraussetzung eine Indexmenge I und offene Mengen $U_i \subseteq \mathbb{R}$ für alle $i \in I$, sowie stetige Abbildungen $f_i\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $i \in I$ mit $X \setminus A = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}[U_i]$. Insbesondere existiert $k \in I$ mit $x \in f_k^{-1}[U_k]$.
Der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ ist metrisierbar, also insbesondere ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum. Folglich existiert eine stetige Abbildung $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$ mit $g(f_k(x)) = 1$ und $g[\mathbb{R} \setminus U_k] \subseteq \{0\}$. Dann ist $g \circ f_k\colon X \longrightarrow [0;1]$ stetig, und es gilt $g \circ f_k[A] \subseteq g \circ f_k[X \setminus f_k^{-1}[U_k]] \subseteq g[\mathbb{R} \setminus U_k] \subseteq \{0\}$ und $g \circ f_k(x) = 1$.

□

I.11.10 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann ein T_4-Raum, wenn für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ und für alle offenen Mengen $Q \subseteq X$ mit $A \subseteq Q$ eine offene Menge U so existiert, dass $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq Q$ gilt.*

Beweis: Übungsaufgabe 7/2. □

Wir betrachten nun topologische Räume, die eine Kombination von Trennungseigenschaften erfüllen. Auch hier unterscheiden sich die Definitionen wieder von Autor zu Autor.

I.11.11 Definition: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X regulär, falls X ein T_3- und T_1-Raum ist, vollständig regulär, wenn X ein $T_{3\frac{1}{2}}$- und T_1-*

Raum ist und normal, falls X ein T_4- und T_1-Raum ist.

I.11.12 Bemerkung:

(a) *Ein regulärer Raum ist hausdorffsch, denn in T_1-Räumen sind die ein-elementigen Teilmengen abgeschlossen und in T_3-Räumen können abgeschlossene Mengen von Punkten in ihrem Komplement getrennt werden.*

(b) *Da $T_{3\frac{1}{2}}$-Räume immer T_3-Räume sind, sind vollständig reguläre Räume auch regulär.*

(c) *In normalen Räumen sind ein-elementige Mengen abgeschlossen, und disjunkte, abgeschlossene Mengen können getrennt werden, also sind normale Räume regulär. Wir werden später sehen, dass sie sogar vollständig regulär sind.*

Es gelten also folgende Beziehungen:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{regulär} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{vollst. regulär} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{normal} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
T_0 & T_1 \arrow[l, Rightarrow] & T_2 \arrow[l, Rightarrow] & T_3 & T_{3\frac{1}{2}} \arrow[l, Rightarrow] & T_4
\end{tikzcd}$$

Im Folgenden befassen wir uns mit Vererbbarkeit von Trennungseigenschaften.

I.11.13 Satz:

(a) *Für $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ ist jeder Teilraum eines T_i-Raumes ein T_i-Raum.*

(b) *Jeder abgeschlossene Unterraum eines T_4-Raumes ist ein T_4-Raum. Insbesondere ist jeder abgeschlossene Unterraum eines normalen Raumes normal.*

Beweis:

zu(a) Wir zeigen die Aussage nur exemplarisch für $i = 3$.
Seien $(X, \mathcal{O})$ ein T_3-Raum, $M \subseteq X$, $x \in M$, $A \subseteq M$ abgeschlossen in M und $x \notin A$. Dann existiert eine abgeschlossene Menge $B \subseteq X$ mit $B \cap M = A$ und $x \notin B$. Da X ein T_3-Raum ist, existieren disjunkte Umgebungen U von x und V von B. Dann sind $M \cap V$ und $U \cap V$ disjunkte Umgebungen von A bzw. x in M.

zu(b) Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$, eine abgeschlossene Menge $M \subseteq X$ und in M abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq M$ gilt, dass A und B auch abgeschlossen in X sind. Ist X ein T_4-Raum, können wir die Behauptung analog zu Teil (a) zeigen.

□

I.11.14 Bemerkung: *Satz I.11.13(b) ist im Allgemeinen falsch für nicht abgeschlossene Teilräume. Betrachte dazu*

$$X = \{1, 2, 3, 4\} \text{ und } \mathcal{O} = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Die abgeschlossenen Mengen sind $\varnothing, X, \{4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}$. Sind $A, B \subseteq$

X abgeschlossen und disjunkt, gilt also schon $A = \varnothing$ oder $B = \varnothing$. Somit ist X ein T_4-Raum.
Betrachte nun $M = \{1, 2, 3\}$, d.h. $\mathcal{O}_M = \mathcal{O} \setminus \{X\}$ und M,$\varnothing$,$\{2, 3\}$,$\{3\}$,$\{2\}$ sind die in M abgeschlossenen Mengen. Zu $A := \{2\}$ und $B := \{3\}$ existieren keine disjunkten Umgebungen in M, d. h. $(M, \mathcal{O}_M)$ ist kein T_4-Raum.

I.11.15 Satz: *Seien J eine Indexmenge, $(X_j, \mathcal{O}_j)$ topologische nicht-leere Räume für alle $j \in J$ und $(X, \mathcal{O})$ ihr Produktraum.*

(a) Für $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$ ist X ein T_i-Raum genau dann, wenn X_j T_i-Raum für alle $j \in J$ gilt.
(b) Produkte von T_4-Räumen sind im Allgemeinen keine T_4-Räume.

Beweis:

<u>*zu(a)*</u> <u>$\Rightarrow$:</u> Sei $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$, X ein T_i-Raum und $j \in J$. Wie in Aufgabe 2/4 gezeigt ist X_j homöomorph zu einem Teilraum von X, nämlich zu $\prod_{k \in J} Y_k$ mit $Y_k = \begin{cases} X_j \text{ falls } k = j \\ \{x_k\} \text{ sonst} \end{cases}$ für ein beliebiges $x_k \in X_k$. Nach Satz I.11.13 ist jeder Teilraum eines T_i-Raumes ein T_i-Raum, also ist auch X_j ein T_i-Raum.

<u>$\Leftarrow$:</u> Wir zeigen zunächst exemplarisch für $i = 0, 1, 2, 3$ den Fall $i = 3$. Seien also alle X_j, $j \in J$, T_3-Räume. Wir zeigen: Für alle $x \in X$ und $U_x \in \mathcal{U}(x)$ existiert eine abgeschlossene Umgebung A von x mit $A \subseteq U_x$. Dann ist X nach Satz I.11.8 ein T_3-Raum.
Sei $x = (x_j)_{j \in J} \in X$. Für jede Umgebung U_x von x existiert eine Umgebung $U \subseteq U_x$ von x mit $U := \bigcap_{k \in K} p_k^{-1}[U_k]$, wobei $K \subseteq I$ endlich und U_k Umgebung von x_k in X_k für alle $k \in K$ ist. Da X_k ein T_3-Raum für alle $k \in K$ ist, existieren nach Satz I.11.8 abgeschlossene Umgebungen A_k von x_k mit $x_k \in A_k \subseteq U_k$ für alle $k \in K$. Dann ist $A := \bigcap_{k \in K} p_k^{-1}[A_k]$ eine abgeschlossene Umgebung von x, da die Projektionen stetig sind. Es gilt $x \in A \subseteq U$.
Sei nun X_j ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum für alle $j \in J$. Seien A eine abgeschlossene Teilmenge von X und $x = (x_j)_{j \in J} \in X \setminus A$. Ist $A = \emptyset$, so folgt die Behauptung sofort. Nehmen wir also an, dass A nicht leer ist. Da $X \setminus A$ offen ist, existieren offene Mengen $Q_j \subseteq X_j$ so, dass $Q_j = X_j$ für fast alle $j \in J$ und $x \in Q := \prod_{j \in J} Q_j \subseteq X \setminus A$ gilt. Sei $K := \{j \in J \mid Q_j \neq X_j\}$. Die Menge K ist endlich und nicht leer.
Sei $k \in K$, d. h. x_k liegt nicht in der abgeschlossenen Menge $X_k \setminus Q_k$. Da X_k ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist, existiert eine stetige Abbildung $f_k : X_k \longrightarrow [0; 1]$ mit $f_k(x_k) = 1$ und $f_k[X_k \setminus Q_k] \subseteq \{0\}$. Wir definieren nun die Abbildung $f : X \longrightarrow [0; 1]$ durch $f((y_j)_{j \in J}) = \min\{f_l(y_l) \mid l \in K\}$. Da K endlich ist, ist f wohldefiniert und stetig. Es gilt weiter $f(x) = 1$. Für ein $a = (a_j)_{j \in J} \in A$ existiert ein $l \in K$ mit $a_l \notin Q_l$ und somit gilt $f(a) = 0$.

<u>*zu(b)*</u> Wir geben ein Beispiel nach dem folgenden Lemma an.

□

I.11.16 Bemerkung: *Für das nächste Lemma erinnern wir kurz an grundlegende Definitionen aus der Mengenlehre. Sind A und B Mengen dann ist*
(a) $|A| \leq |B|$, *falls es eine injektive Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ gibt,*
(b) $|A| < |B|$, *falls es eine injektive Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ gibt, aber keine injektive Abbildung $g\colon B \longrightarrow A$,*
(c) $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

I.11.17 Lemma: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Enthält X eine dichte Teilmenge D und einen abgeschlossenen diskreten Unterraum S mit $|S| \geq |\mathcal{P}(D)|$, dann ist X nicht normal.*

Beweis: Angenommen, X ist ein $T4$-Raum.
Da S diskret ist, sind alle Teilmengen von S sowohl offen, als auch abgeschlossen in S. Da S abgeschlossen in X ist, sind alle Teilmengen von S auch in X abgeschlossen. Für alle $A \subseteq S$ existieren offene Mengen V_A und $V_{S\setminus A}$ in X mit $A \subseteq V_A$, $S \setminus A \subseteq V_{S\setminus A}$ und $V_A \cap V_{S\setminus A} = \varnothing$, da X ein $T4$-Raum ist. Definiere

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{P}(S) &\longrightarrow \mathcal{P}(D), \\ A &\longmapsto V_A \cap D. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass f injektiv ist. Seien dazu $A, B \subseteq S$ mit $A \neq B$. O.B.d.A. sei $A \setminus B \neq \varnothing$. Sei $x \in A \setminus B$, also $x \in S \setminus B$, also $x \in V_A \cap V_{S\setminus B}$. Da $V_A \cap V_{S\setminus B}$ offen und D dicht in X ist, gilt $V_A \cap V_{S\setminus B} \cap D \neq \varnothing$, aber $V_B \cap V_{S\setminus B} \cap D = \varnothing$. Es folgt $V_A \cap D \neq V_B \cap D$, also $f[A] \neq f[B]$, d.h. f ist injektiv. Damit gilt $|\mathcal{P}(S)| \leq |\mathcal{P}(D)| \leq |S| < |\mathcal{P}(S)|$. ↯ □

I.11.18 Beispiel (und Beweis von I.11.15(b)):
Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ die Sorgenfrey -Gerade, d.h. $\mathcal{O}$ ist die Topologie, die von den Umgebungssystemen $\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon; x] \subseteq U\}$ erzeugt wird. Nach Aufgabe 6/3 ist $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ normal und $\mathcal{O}$ feiner als die euklidische Topologie.
Behauptung : $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ *ist nicht normal.*
Setze $D := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq X$ und $S := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset X$. Dann ist D dicht in X. Die Menge S ist abgeschlossen bzgl. der euklidischen Topologie, also auch bzgl. $\mathcal{O}_X$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\big((x-1, x] \times (-x-1, -x]\big) \cap S = \{(x, -x)\}$ offen in S, also ist S diskret.
Weiter ist D abzählbar, also $|\mathcal{P}(D)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}| = S$. Tatsächlich gilt $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ (siehe beispielsweise Kapitel 17 Mengen, Funktionen und die Kontinuumshypothese *[1]). Nach Lemma I.11.17 ist X nicht normal.*

Wir werden später noch einen weiteren wichtigen Typ topologischer Räume kennenlernen, nämlich Quotientenräume. An dieser Stelle sei nur schon die Warnung ausgesprochen, dass sich Trennungseigenschaften im Allgemeinen nicht auf Quotientenräume vererben.

I.12. T_4-Räume und Stetigkeit

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Die Wahl der Topologie auf X schränkt die Vielfältigkeit der stetigen Funktionen $f\colon X \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ ein. Ist $\mathcal{O}_X$ etwa die triviale Topologie, so sind nur die konstanten Funktionen stetig. In T_4-Räumen gibt es starke Aussagen die Existenz stetiger Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ betreffend.

I.12.1 Satz (Lemma von Urysohn)**:** *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann ist X ein T4-Raum genau dann, wenn zu je zwei disjunkten, nicht-leeren, abgeschlossenen Teilmengen A, B von X eine stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow [0;1]$ derart existiert, dass $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$ gilt.*

Beweis:

$\underline{\Leftarrow}$: Seien $A, B \subseteq X$ disjunkt, nicht-leer und abgeschlossen, und sei $f\colon X \longrightarrow [0;1]$ stetig mit $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$. Setze $Q_1 := f^{-1}[[0; \frac{1}{2})]$ und $Q_2 := f^{-1}[(\frac{1}{2}; 1]]$. Dann sind Q_1 und Q_2 offen in X, $A \subseteq Q_1$, $B \subseteq Q_2$ und $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Also ist X ein T_4-Raum.

$\underline{\Rightarrow}$: *Oft wird auch nur diese Richtung als Lemma von Urysohn bezeichnet.*
Wir konstruieren zunächst eine Folge geschachtelter Mengen "von A nach B", die möglichst fein ist. Dazu benutzen wir wiederholt die Charakterisierung von T_4-Räumen aus Satz I.11.10. Dazu definieren wir

$$D := \left\{ x \in [0;1] \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N} \exists k \in \{0, 1, ..., 2^n\} : x = \tfrac{k}{2^n} \right\}.$$

Die Menge D ist eine Teilmenge der dyadischen rationalen Zahlen des Einheitsintervalls und ist dicht in $[0;1]$ (vergleiche hierzu auch die Definition I.8.1 folgenden Bemerkungen zu p-adischen Brüchen). Wir konstruieren nun eine Abbildung $\nu\colon D \longrightarrow \mathcal{O}$ mit

(i) $A \subseteq \nu(0)$,

(ii) $Q := X \setminus B = \nu(1)$,

(iii) $\forall d, d' \in D : d < d' \Rightarrow \overline{\nu(d)} \subseteq \nu(d')$.

Für all $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $D_n := \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, ..., \frac{2^n-1}{2^n}, 1\}$ ist, d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} D_n = D$ und $D_n \subseteq D_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren nun induktiv Abbildungen $\nu_n\colon D_n \longrightarrow \mathcal{O}$, $n \in \mathbb{N}_0$, wobei folgende Eigenschaften erfüllt sein sollen:

(a) $A \subseteq \nu_0(0), \nu_0(1) = Q$,

(b) $\forall d, d' \in D_n : d < d' \Rightarrow \overline{\nu_n(d)} \subseteq \nu_n(d')$,

(c) $\nu_{n|D_{n-1}} = \nu_{n-1}$.

$\underline{n = 0:}$ Nach Satz I.11.10 existiert $Q_0 \in \mathcal{O}$ mit $A \subseteq Q_o \subseteq Q \subseteq Q$. Setze $\nu_0(0) := Q_0$ und $\nu_0(1) = Q$. Dann gelten (a)-(c) (mit $D_{-1} := \varnothing$).

$\underline{n \rightarrow n+1:}$ Die Abbildung ν_n erfülle (a)-(c). Setze dann $\nu_{n+1}(d) := \nu_n(d)$ für alle $d \in D_n$. Somit gelten (a) und (c). Für $d \in D_{n+1} \setminus D_n$ existiert $k \in \mathbb{N}$ ungerade mit $d = \frac{k}{2^{n+1}}$, insbesondere gilt $d_1 := \frac{k-1}{2^{n+1}}, d_2 := \frac{k+1}{2^{n+1}} \in D_n$.
Dann gilt $\nu_{n+1}(d_1) = \nu_n(d_1) \subseteq \overline{\nu_n(d_1)} \subseteq \nu_n(d_2) = \nu_{n+1}(d_2)$. Nach Satz I.11.10 existiert $Q_k \in \mathcal{O}$ mit $\nu_{n+1}(d_1) \subseteq Q_k \subseteq \overline{Q_k} \subseteq \nu_{n+1}(d_2)$.

Setzte $\nu_{n+1}(\frac{k}{2^{n+1}}) := Q_k$. Dann gilt auch (a).
Für die Definition der Funktion ν wählen wir für alle $d \in D$ ein $n_d \in \mathbb{N}$ so, dass $d \in D_{n_d}$ gilt. Setze nun

$$\begin{aligned}\nu \colon D &\longrightarrow \mathcal{O},\\ d &\longmapsto \nu_{n_d}(d).\end{aligned}$$

Dann ist ν wohldefiniert wegen (c) und erfüllt (i)-(iii) wegen (a) und (b).
Wir definieren weiter

$$\begin{aligned}f \colon X &\longrightarrow [0;1],\\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B \\ \inf\{d \in D \mid x \in \nu(d)\} & \text{falls } x \in Q = X \setminus B \end{cases}.\end{aligned}$$

Da $x \in \nu(1)$ für alle $x \in X \setminus B$ ist f wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist.
Sei also $x \in X$ und U eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[\cap [0;1] \subseteq U$.
Betrachte zunächst den Fall $f(x) \notin \{0,1\}$ und o.B.d.A. $U_\varepsilon :=]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[\subseteq [0;1]$. Dann existieren $d_1, d_2 \in U_\varepsilon \cap D$ mit $d_1 < f(x) < d_2$, insbesondere gilt $d_1 < d_2$ und $x \in \nu(d_2) \setminus \overline{\nu(d_1)}$ wegen (iii) und da D dicht in $[0;1]$ ist. Es ist außerdem $\nu(d_2) \setminus \overline{\nu(d_1)}$ offen in X und $\nu(d_2) \setminus \overline{\nu(d_1)} \subseteq f^{-1}[U]$, da $d_1 \leq f(y) \leq d_2$ für alle $y \in \nu(d_2) \setminus \overline{\nu(d_1)}$. Damit ist $f^{-1}[U] \in \mathcal{U}(x)$.
Sei nun $f(x) = 0$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $[0; \varepsilon[\subseteq U$, insbesondere existiert $d \in D$ mit $0 < d < \varepsilon$. Dann ist $x \in \nu(d)$ wegen (iii), also $\nu(d) \in \mathcal{U}(x)$ und $\nu(d) \subseteq f^{-1}[U]$.
Sei letztlich $f(x) = 1$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $]1 - \varepsilon; 1] \subseteq U$ und $d \in D$ mit $1 - \varepsilon < d < 1$. Dann ist $x \in X \setminus \overline{\nu(d)}$, da andernfalls $x \in \nu(d')$ für ein $d < d' < 1$, also $f(x) < 1$ wäre. Somit ist $X \setminus \overline{\nu(d)} \in \mathcal{U}(x)$ und $X \setminus \overline{\nu(d)} \subseteq f^{-1}[U]$.

□

Das Lemma von Urysohn erlaubt uns nun den Zusatz zu Bemerkung I.11.12 (c) zu verifizieren.

I.12.2 Korollar: *Jeder normale Raum ist vollständig regulär.*

Beweis: Seien $(X, \mathcal{O})$ ein normaler topologischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Dann ist $B := \{x\}$ abgeschlossen, da X insbesondere ein T_1-Raum ist. Für $A = \varnothing$ ist nichts zu zeigen, andernfalls liefert das Lemma von Urysohn die gesuchte stetige Abbildung. □

Das Ergebnis aus dem Satz von Urysohn lässt sich noch verallgemeinern, wie der nächste Satz zeigt.

I.12.3 Satz (Tietze)**:** *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Es ist X genau dann ein T_4-Raum, wenn jede auf einer abgeschlossenen Teilmenge M von X definierte stetige Abbildung $f\colon M \longrightarrow [a;b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, eine stetige Fortsetzung $F\colon X \longrightarrow [a;b]$ besitzt.*

Für den Beweis brauchen wir zwei Lemmata.

I.12.4 Lemma: *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein T_4-Raum, $M \subseteq X$ abgeschlossen, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $u\colon M \longrightarrow [-r;r]$ eine stetige Abbildung.*
Dann existiert eine stetige Abbildung $\nu\colon X \longrightarrow [-\frac{r}{3}; \frac{r}{3}]$ mit $|u(x) - \nu(x)| \leq \frac{2}{3}r$ für alle $x \in M$.

Beweis: Wir setzen $A := u^{-1}([-r; -\frac{r}{3}])$ und $B := u^{-1}([\frac{r}{3}; r])$. Dann sind A und B abgeschlossen, da u stetig ist, und es gilt $A \cap B = \varnothing$. Zunächst nehmen wir an, dass $A \neq \varnothing \neq B$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow [0;1]$ mit $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$. Definiere nun $\nu\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\nu(x) := \frac{2}{3} \cdot r \cdot f(x) - \frac{r}{3}$. Dann ist ν stetig und $\nu[X] \subseteq [-\frac{r}{3}; \frac{r}{3}]$.

Ist $x \in A$, so gilt $\nu(x) = -\frac{r}{3}$ und $u(x) \in [-r; -\frac{r}{3}]$, also $u(x) - \nu(x) \in [-\frac{2}{3}r; 0]$, d.h. $|u(x) - \nu(x)| \leq \frac{2}{3}r$.
Ist $x \in B$, so gilt $\nu(x) = \frac{r}{3}$ und $u(x) \in [\frac{r}{3}; r]$, also $|u(x) - \nu(x)| \leq \frac{2}{3}r$.
Ist $x \in M \backslash (A \cup B)$, so gilt $-\frac{r}{3} \leq x \leq \frac{r}{3}$ und $-\frac{r}{3} \leq \nu(x) \leq \frac{r}{3}$, also $|u(x) - \nu(x)| \leq \frac{2}{3}r$.

Falls $A = \varnothing$ und $B \neq \varnothing$, wähle $f \equiv 1$, d.h. $\nu \equiv \frac{r}{3}$. Falls $A \neq \varnothing$ und $B = \varnothing$, wähle $f \equiv 0$, d.h. $\nu \equiv -\frac{r}{3}$. Falls $A = \varnothing = B$ wähle $\nu \equiv 0$. In allen Fällen folgt die Behauptung. □

I.12.5 Lemma: *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein T_4-Raum, $M \subseteq X$ abgeschlossen und $g\colon M \longrightarrow [-1;1]$ eine stetige Abbildung. Dann existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von stetigen Abbildung $g_n\colon X \longrightarrow [-1 + (\frac{2}{3})^n; 1 - (\frac{2}{3})^n]$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

(i) $|g(x) - g_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ *für alle* $x \in M$,

(ii) $|g(x) - g_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$ *für alle* $x \in X$.

Beweis: Wir definieren eine Funktionenfolge mit den gewünschten Eigenschaften induktiv.

$\underline{n = 0, 1:}$ Setze $g_0 \equiv 0$. Nach Lemma I.12.4 (für $r = 1$, $u = g$) existiert eine stetige Funktion $g_1\colon X \longrightarrow [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$ mit $|g(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $x \in M$. Dann erfüllt g_1 die Bedingungen (i) und (ii).

$\underline{n \to n+1:}$ Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $g_1, ..., g_n$ Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften. Nach (i) ist $g - g_{n|M}$ eine Abbildung von M nach $[-(\frac{2}{3})^n; (\frac{2}{3})^n]$. Weiter ist $g - g_{n|M}$ stetig.
Nach Lemma I.12.4 (für $u = g - g_{n|M}$, $r = (\frac{2}{3})^{n+1}$) existiert eine stetige Abbildungen $\nu_n\colon X \longrightarrow [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n; \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ mit $|g(x) - g_n(x) - \nu_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}$. Setze nun $g_{n+1} := g_n + \nu_n$. Dann ist g_{n+1} stetig, es gilt (i) und für alle

$x \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) = g_n(x) + \nu_n(x) \in & [-1 + (\frac{2}{3})^n - \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n; 1 - (\frac{2}{3})^n + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n] \\ = & [-1 + (\frac{2}{3})^{n+1}; 1 - (\frac{2}{3})^{n+1}]. \end{aligned}$$

Letztendlich gilt $|g_{n+1}(x) - g_n(x)| = |\nu_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ für alle $x \in X$, somit ist Bedingung (ii) erfüllt.

□

Beweis (Satz von Tietze):

$\underline{\Leftarrow}$ Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, nicht-leer und disjunkt. Setze $M := A \cup B$ und definiere

$$\begin{aligned} g \colon M &\longrightarrow [0;1], \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 \text{ falls } x \in A \\ 1 \text{ falls } x \in B \end{cases} . \end{aligned}$$

Da der Schnitt von A und B leer ist, ist g wohldefiniert. Weiter sind $g_{|A}$ und $g_{|B}$ konstant, also stetig. Dann ist auch g stetig (es ist einfach zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind) und nach Voraussetzung existiert eine stetige Fortsetzung von g auf X. Nach dem Lemma von Urysohn ist X damit ein T_4-Raum.

$\underline{\Rightarrow}$ Seien $M \subseteq X$ abgeschlossen, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ und $f \colon M \longrightarrow [a;b]$ eine stetige Abbildung. Ist $a = b$, so wähle $F \equiv a$. Sei also $a < b$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $a = -1$ und $b = 1$ ist, da $[a;b]$ homöomorph zu $[-1;1]$ ist.
Wähle nun eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gemäß Lemma I.12.5 (für $g = f$). Wir zeigen zunächst, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Dazu seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$(*)\ |f_n(x) - f_m(x)| = |\sum_{k=n}^{m-1} f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$
$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Somit konvergiert $(f_n(x))$ für alle $x \in X$ nach dem Cauchy-Kriterium. Setze $F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$. Es gilt $F(x) \in [-1;1]$ für alle $x \in X$, da $f_n(x) \in [-1;1]$ für alle $x \in X$. Also $F \colon X \longrightarrow [-1;1]$. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$:

$$\begin{aligned} &|F(x) - f_n(x)| = |\lim_{m\to\infty} f_m(x) - f_n(x)| \\ = &\lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \overset{(*)}{\leq} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \end{aligned}$$

d.h. (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen F. Dann ist F stetig, da f_n stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Letztlich ist $F_{|M} = f$ nach Konstruktion und (i) aus Lemma I.12.5. Damit ist F eine stetige Fortsetzung von f.

□

I.13. Kompaktheit

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff der Kompaktheit, der schon in I.7 eingeführt wurde, etwas genauer unter die Lupe nehmen. Wir erinnern zunächst an die Definition.

I.13.0 Definition: *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*
X heißt quasikompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.
X heißt kompakt, falls X quasikompakt und hausdorffsch ist.

Kompakte Räume haben eine Reihe schöner Eigenschaften.

I.13.1 Satz: *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum. Dann ist X normal.*

Beweis: Da X ein T_2-Raum ist, ist X auch ein T_1-Raum. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \varnothing$. Nach Satz I.7.9 und Satz I.11.13 (a) sind A und B kompakt. Nach Satz I.7.10 existieren für alle $x \in A$ offene disjunkte Umgebungen U_x von x und V_x von B. Da A kompakt ist, existiert $K \subseteq A$ endlich mit $A \subseteq \bigcup_{x\in K} U_x =: U$. Dann sind U und $\bigcap_{x\in K} V_x$ disjunkte Umgebungen von A und B. □

I.13.2 Satz: *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) X ist quasikompakt.
(b) Jede Menge $\{A_i \mid i \in I\}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$ enthält eine endliche Teilmenge $\{A_i \mid i \in I' \subseteq I\}$ mit $\bigcap_{i\in I'} A_i = \varnothing$.
(c) Jede Filterbasis auf X besitzt einen Häufungspunkt in X.
(d) Jeder Ultrafilter auf X konvergiert gegen einen Punkt aus X.

Beweis:
$\underline{(a) \Rightarrow (b):}$ Sei $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen von X mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$. Dann ist $\{X \setminus A_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Menge $I' \subseteq I$ mit $\bigcup_{i\in I'} X \setminus A_i = X$, d.h. $\bigcap_{i\in I'} A_i = \varnothing$.

$\underline{(b) \Rightarrow (c):}$ Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X. Angenommen, $\mathcal{B}$ hat keinen Häufungspunkt, d.h. $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} \overline{B} = \varnothing$. Nach (b) existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{B}$ mit $\bigcap_{B\in\mathcal{B}^*} \overline{B} = \varnothing$. Wegen (FB1) existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq \bigcap_{B\in\mathcal{B}^*} B \subseteq \bigcap_{B\in\mathcal{B}^*} \overline{B} = \varnothing$, im Widerspruch zu (FB2).

$\underline{(c) \Rightarrow (d):}$ Jeder Ultrafilter ist insbesondere eine Filterbasis. Die Behauptung folgt mit Korollar I.10.17.

$\underline{(d) \Rightarrow (a):}$ Angenommen, es existiert eine offene Überdeckung $\{Q_i \mid i \in I\}$ von X, so dass $\bigcup_{i\in I'} Q_i \neq X$ für jede endliche Teilmenge $I' \subseteq I$ gilt. Setze $\mathcal{B} := \left\{X \setminus \bigcup_{i\in K} Q_i \;\middle|\; K \subseteq I \text{ endlich}\right\}$, d.h. $\varnothing \notin \mathcal{B}$. Seien $K, M \subseteq I$ endlich. Dann ist $K \cup M$ endlich, und es gilt $(X \setminus \bigcup_{k\in K} Q_k) \cap (X \setminus \bigcup_{m\in M} Q_m) = X \setminus \bigcup_{l\in K\cup M} Q_l \in \mathcal{B}$, also gilt (FB1), d.h. $\mathcal{B}$ ist eine Filterbasis.

Nach Satz I.10.14 (bzw. Bemerkung I.10.15) existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}$. Nach Voraussetzung existiert $x \in X$ mit $\mathcal{F} \to x$. Dann existiert $i \in I$ mit $x \in Q_i$ und weiter existiert $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq Q_i$, d.h. $Q_i \in \mathcal{F}$. Nach Definition von $\mathcal{B}$ gilt dann $X \setminus Q_i \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, also $\varnothing = Q_i \cap X \setminus Q_i \in \mathcal{F}$. $\lightning$

□

I.13.3 Korollar: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein quasikompakter topologischer Raum. Dann hat jede Folge in X einen Häufungspunkt.*

Beweis: Zu jeder Folge (x_n) in X hat die Endstückfilterbasis $\mathcal{B}((x_n))$ (vgl. Beispiel I.10.2 3.) nach Satz I.13.2 (c) einen Häufungspunkt, der dann auch Häufungspunkt von (x_n) ist (vgl. Beispiel I.10.6 3.). □

I.13.4 Bemerkung: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. X muss nicht quasikompakt sein, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt. (s. Übung 9, Aufgabe 3)*

I.13.5 Satz (Alexander)**:** *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{O}$. Der Raum X ist genau dann quasikompakt, wenn jede offene Überdeckung von X mit Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Beweis:

$\Rightarrow$ klar.

$\Leftarrow$ Angenomen, X ist nicht quasikompakt. Dann existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X, der nicht konvergiert, d.h. für alle $x \in X$ existiert eine Umgebungen $U_x \in \mathcal{S}$ von x mit $U_x \notin \mathcal{F}$. Das Mengensystem $\mathcal{U} := \{U_x \mid x \in X\}$ ist eine offene Überdeckung von X bestehend aus Elementen der Subbasis. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Menge $Y \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{y \in Y} U_y$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist und $U_y \notin \mathcal{F}$ für all $y \in Y$ gilt, folgt $X \setminus U_y \in \mathcal{F}$ und somit auch $\bigcap_{y \in Y}(X \setminus U_y) \in \mathcal{F}$. Weiter ist $\bigcap_{y \in Y}(X \setminus U_y) = X \setminus (\bigcup_{y \in Y} U_y) = \varnothing$. $\lightning$

□

I.13.6 Satz (Tychonoff)**:** *Seien I eine Indexmenge, $(X_i, \mathcal{O}_i)$ für alle $i \in I$ topologische Räume und $(X, \mathcal{O})$ ihr topologisches Produkt. Der Raum X ist genau dann (quasi-)kompakt, wenn X_i (quasi-)kompakt ist für alle $i \in I$.*

Beweis: Sobald wir die Aussage für quasikompakte Räume gezeigt haben folgt das Ergebnis für kompakte Räume aus Satz I.11.15.

$\Rightarrow$ Sei X quasikompakt und sei $i \in I$. Da die Projektion p_i stetig ist und $X_i = p_i[X]$ gilt, folgt mit Satz I.7.13, dass X_i quasikompakt ist.

$\Leftarrow$ Sei X_i für alle $i \in I$ quasikompakt. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und $i \in I$. Da p_i surjektiv ist, ist $p_i[\mathcal{F}]$ ein Ultrafilter auf X_i, was man wie folgt

einsieht. Angenommen, $p_i[\mathcal{F}]$ ist kein Ultrafilter auf X_i. Dann existiert ein Ultrafilter $\mathcal{G} \supsetneqq p_i[\mathcal{F}]$, also existiert auch $G \in \mathcal{G} \setminus p_i[\mathcal{F}]$. Dann muss $p_i^{-1}[G] \notin \mathcal{F}$ gelten, da p_i surjektiv ist. Es folgt $X \setminus p_i^{-1}[G] \in \mathcal{F}$, also $p_i[X \setminus p_i^{-1}[G]] = X_i \setminus G \in \mathcal{G}$. Da $p_i[\mathcal{F}] \subseteq \mathcal{G}$ gilt, folgt $G, X_i \setminus G \in \mathcal{G}$. $\lightning$
Da X_i quasikompakt ist, konvergiert $p_i[\mathcal{F}]$ und somit konvergiert nach Korollar I.10.19 auch $\mathcal{F}$. Nach Satz I.13.2 ist X dann quasikompakt.

$\square$

Wir können nun leicht einen aus der Analysis wohlbekannten Satz beweisen.

I.13.7 Satz (Heine-Borel)**:** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist K genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis:

$\underline{\Rightarrow}$ Sei K kompakt. Da $\mathbb{R}^n$ ein T_2-Raum ist, ist K abgeschlossen. Weiter gilt $K \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k(0)$. Also existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq \bigcup_{k \leq n} B_k(0)$, und somit ist K beschränkt.

$\underline{\Leftarrow}$ Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, also existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq B_k(0)$. Abgeschlossene Intervalle $[a; b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ sind kompakt bzgl. der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 4/1, $\mathcal{O}_{nat} = \mathcal{O}_{Ord}$ auf $\mathbb{R}$). Dann ist nach Satz I.13.6 $X := [-k; k]^n$ kompakt. Die Behauptung folgt jetzt aus Satz I.11.13 und Satz I.7.9.

$\square$

Eine Abschwächung des Kompaktheitbegriffs führt uns zu der folgenden Definition.

I.13.8 Definition: *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*
X heißt lokalkompakt, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt aus X eine kompakte Umgebung besitzt.
Eine Teilmenge M von X heißt lokalkompakt, wenn der Unterraum M lokalkompakt ist.

I.13.9 Beispiele:

(1) $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt aber nicht kompakt.
(2) Jeder diskrete Raum X ist lokalkompakt, da für alle $x \in X$ die Menge $\{x\}$ eine kompakte Umgebung von x ist.
(3) Die Sorgenfrey-Gerade ist nicht lokalkompakt (vergleiche Aufgabe 9/3).
(4) Jeder kompakte Raum ist lokalkompakt.

I.13.10 Satz: *Jeder lokalkompakte Raum ist regulär.*

Beweis: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein lokalkompakter Raum. Dann ist X ein T_2- und insbesondere ein T_1-Raum.
Wir zeigen, dass jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen

besitzt:
Seien $x \in X$, $U \in \mathcal{U}(x)$ und K eine kompakte Umgebung von x. Dann ist $U \cap K \in \mathcal{U}(x)$. Nach Satz I.13.1 ist K normal und insbesondere regulär. Also existiert eine in K abgeschlossene Umgebung V von x mit $V \subseteq U \cap K$. Da K insbesondere abgeschlossen im Hausdorff-Raum X und V abgeschlossen in K ist, ist V auch abgeschlossen in X. Weiter existiert $W \in \mathcal{U}(x)$ mit $V = K \cap W$. Da K und W Umgebungen von x sind, ist auch V eine Umgebung von x.
Nach Satz I.11.8 ist X ein T_3-Raum, also regulär. □

I.13.11 Korollar: *In einem lokalkompakten Raum besitzt jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen.*

Beweis: Folgt aus I.11.8, der Definition von lokalkompakt, Korollar I.7.12 und Satz I.7.9. □

Wir wollen nun untersuchen, welche Teilräume lokalkompakter Räume lokalkompakt sind.

I.13.12 Beispiel: *Betrachte* $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ *und* $M := \left\{ (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$. *Dann ist der Teilraum* M *des lokalkompakten Raumes* $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ *nicht lokalkompakt, da* 0 *keine kompakte Umgebung besitzt.*

I.13.13 Satz: *Seien* $(X, \mathcal{O})$ *ein lokalkompakter Raum und* $M \subseteq X$. *Dann ist* M *genau dann lokalkompakt, wenn* $A \subseteq X$ *abgeschlossen und* $Q \subseteq X$ *offen mit* $A \cap Q = M$ *existieren.*

Beweis: Wir beginnen mit einer leicht einzusehenden Vorbemerkung. Für einen beliebigen topologischen Raum X und Teilmengen $K \subseteq L \subseteq X$ gilt:
K ist genau dann quasikompakt in L, wenn K quasikompakt in X ist.

$\underline{\Leftarrow}$ Sei $x \in M$.

(1) Sei M abgeschlossen. Sei $V \in \mathcal{U}(x)$ kompakt. Dann ist $M \cap V$ eine Umgebung von x in M und abgeschlossen in V. Somit ist $M \cap V$ kompakt in V, also in X, also in M.

(2) Sei M offen, d.h. $M \in \mathcal{U}(x)$. Wegen I.13.11 existiert $V \subseteq \mathcal{U}(x)$ kompakt mit $V \subseteq M$. Dann ist V kompakt in M und Umgebung von x in M, da $V = V \cap M$ gilt.

Sei nun $M = Q \cap A$, wobei A eine abgeschlossene und Q eine offene Teilmenge von X sei. Dann ist Q lokalkompakt nach (2). Weiter ist $M = A \cap Q$ abgeschlossen in Q, also ist M lokalkompakt bzgl. Q nach (1). Also ist M auch lokalkompakt in X, da die Spurtopologien $\mathcal{O}_M$ und $(\mathcal{O}_Q)_M$ übereinstimmen.

$\underline{\Rightarrow}$ Wir setzen $A := \overline{M}$ und zeigen, dass M offen in A ist. Dann existiert $Q \in \mathcal{O}$ mit $A \cap Q = M$.
Sei also $x \in M$. Dann existiert eine kompakte Umgebung V von x in M.

Insbesondere existiert $Q \in \mathcal{O}$ mit $x \in M \cap Q \subseteq V$ und $x \in Q \cap A$. Angenommen, es gilt $Q \cap A \nsubseteq V$. Dann existiert $a \in (Q \cap A) \setminus V$. Die Umgebung V ist kompakt in M, also auch in A, und somit insbesondere abgeschlossen in A. Damit sind $A \setminus V$ und $A \cap Q$ offen in A und $(A \cap Q) \setminus V = (A \cap Q) \cap (A \setminus V)$ ist ebenfalls offen in A. Dann existiert $W \in \mathcal{O}$ mit $W \cap A = (A \cap Q) \setminus V$, insbesondere $W \in \mathcal{U}(a)$. Da $a \in \overline{M}$, folgt $\varnothing \neq W \cap M = W \cap M \cap A = (Q \cap M) \cap (A \setminus V) \subseteq V \cap (A \setminus V) = \varnothing$. ↯
Also gilt $x \in Q \cap A \subseteq V \subseteq M$, d.h. $Q \cap A$ ist eine Umgebung von $x \in A$. Somit ist M offen in $\overline{A}$.

□

Zum Abschluss wollen wir noch lokalkompakte Produkträume betrachten.

I.13.14 Satz: *Seien I eine Indexmenge, $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $(X, \mathcal{O})$ ihr topologisches Produkt. Dann ist X genau dann lokalkompakt, wenn X_i für alle $i \in I$ lokalkompakt ist und X_i kompakt ist für fast alle $i \in I$.*

Beweis: Aufgabe 4 auf Übungsblatt 9. □

Lokalkompakte Räume sind im Allgemeinen nicht kompakt. Sie können aber auf einfache Art und Weise zu kompakten Räumen erweitert werden, so dass der ursprüngliche Raum dicht im neuen Raum liegt und die ursprüngliche Topologie als Spurtopologie des ursprünglichen Raumes bzgl. der neuen Topologie erhalten bleibt.

I.13.15 Satz und Definition: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalkompakter Raum, der nicht kompakt ist. Es existiert ein kompakter topologischer Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ derart, dass X zu einem Teilraum X_1 von Y homöomorph ist, $\overline{X_1} = Y$ gilt und $Y \setminus X_1$ aus genau einem Punkt besteht. Dieser Punkt heißt unendlich ferner Punkt. Der Raum ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt und heißt Alexandroff- oder Einpunktkompaktifizierung.*

Beweis (Skizze)*:* Es bezeichne ∞ einen Punkt, der nicht in X liegt.
Setze $Y := X \cup \{\infty\}$ und $\mathcal{O}_Y := \left\{ M \subseteq Y \;\middle|\; \begin{array}{c} M \in \mathcal{O}_X \text{ oder } M = Y \setminus K \\ \text{für ein } K \subseteq X \text{ kompakt in } X \end{array} \right\}$.

<u>$\mathcal{O}_Y$ ist eine Topologie:</u>

<u>endliche Schnitte:</u> Sei I eine endliche Indexmenge.

- $\bigcap_{i \in I} Q_i \in \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_Y$ falls $Q_i \in \mathcal{O}_X$ für alle $i \in I$.
- K_i kompakt in X für alle $i \in I$: $\bigcap_{i \in I} Y \setminus K_i = Y \setminus \bigcup_{i \in I} K_i \in \mathcal{O}_Y$, da $\bigcup_{i \in I} K_i$ kompakt in X.
- $Q \in \mathcal{O}_X, K \subseteq X$ kompakt in X: $Q \cap (Y \setminus K) \subseteq X$ und $(Y \setminus K) \cap X = X \setminus K$ ist offen in X, also $Q \cap (Y \setminus K) = Q \cap (X \setminus K) \in \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_Y$.

<u>beliebige Vereinigungen:</u> Sei I eine beliebige Indexmenge.

- $\bigcup_{i\in I} Q_i \in \mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_Y$ falls $Q_i \in \mathcal{O}_X$ für alle $i \in I$.
- K_i kompakt in X für alle $i \in I$: $\bigcup_{i\in I} Y \setminus K_i = Y \setminus (\bigcap_{i\in I} K_i)$, und $\bigcap_{i\in I} K_i$ ist abgeschlossen in X und kompakt in X, also $Y \setminus (\bigcap_{i\in I} K_i) \in \mathcal{O}_Y$.
- $Q \in \mathcal{O}_X, K \subseteq X$ kompakt in X: $Q \cup (Y \setminus K) = Y \setminus (K \cap X \setminus Q)$, da $\infty \notin K, X \setminus Q$. Wegen $K \cap X \setminus Q$ abgeschlossen und kompakt in X, folgt $Q \cup Y \setminus K \in \mathcal{O}_Y$.

$\underline{X_1 \cong X}$: Nach Konstruktion von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist der Unterraum $X_1 := Y \setminus \{\infty\}$ von Y offensichtlich homöomorph zu X.

$\underline{\overline{X_1} = Y}$: Da X nicht kompakt ist, enthält jede Umgebung von ∞ Punkte aus X_1, also $\overline{X_1}^Y = Y$.

<u>Y ist hausdorffsch:</u> Seien $x, y \in Y, x \neq y$. Sind $x, y \in X$, so folgt die Trennungseigenschaft, da X lokalkompakt ist. Ist $x \in X, y = \infty$, so existiert eine kompakte Umgebung K von x in X und $\infty \in Y \setminus K \in \mathcal{O}_Y$.

<u>Y ist quasikompakt:</u> Jede offene Überdeckung von Y enthält ein Element $Y \setminus K \ni \infty$ für ein $K \subseteq X$ kompakt. Die Kompaktheit von K liefert nun eine endliche Teilüberdeckung.

<u>Eindeutigkeit:</u> Sei $(Y', \mathcal{O}'_Y)$ ein weiterer Raum mit den gesuchten Eigenschaften und bezeichne ∞' den unendlich fernen Punkt in Y'.
Dann ist $Y' \setminus \{\infty'\} =: X' \cong X (\cong X_1 = Y \setminus \{\infty\})$. Sei $f\colon X \longrightarrow X'$ ein Homöomorphismus. Definiere $F\colon Y \longrightarrow Y'$ durch $F_{|X} = f$ und $F(\infty) = \infty'$. Dann ist F bijektiv und stetig in $x \in X$. Ausserdem gilt für jede offene Umgebung U von ∞', dass $Y' \setminus U$ abgeschlossen in Y' ist. Da Y' kompakt ist, ist $Y' \setminus U$ auch kompakt in Y' und somit auch in X'. Da f Homöomorphismus ist, ist $F^{-1}[Y' \setminus U] = f^{-1}[Y' \setminus U]$ kompakt in X. Also ist $F^{-1}[U] = Y \setminus F^{-1}[Y' \setminus U]$ Umgebung von ∞ in Y, d.h. F ist stetig in ∞ und damit auf ganz Y.
Die Stetigkeit von F^{-1} zeigt man analog.

□

I.13.16 Bemerkung:

(1) *Eine bekannte Anwendung der Einpunktkompaktifizierung ist die Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ zur sogenannten Riemannschen Zahlenkugel $\tilde{\mathbb{C}}$ - ein wichtiges Objekt in der Funktionentheorie.*

(2) *Allgemeiner kann man eine Kompaktifizierung eines topologischen Raums X als Einbettung von X auf einen dichten Unterraum eines kompakten topologischen Raumes Y definieren. Eine weitere bekannte Methode eine solche Kompaktifizierung zu konstruieren ist die Stone-Čech-Kompaktifizierung.*

Wir wollen jetzt noch einige weitere Varianten von Kompaktheit betrachten.

I.13.17 Definition: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein T_2-Raum. Der Raum X heißt abzählbar kompakt, wenn jede abzählbare offene Überdeckung eine endliche Teilüberde-*

ckung enthält.

I.13.18 Bemerkung:
(a) *Kompakte Räume sind abzählbar kompakt.*
(b) *Hat der T_2-Raum X eine abzählbare Basis, so hat jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung. Also gilt: Erfüllt ein T_2-Raum X das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so ist X genau dann kompakt, wenn X abzählbar kompakt ist.*

Es gibt eine weitere wichtige Charakterisierung abzählbar kompakter Räume.

I.13.19 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein T_2-Raum. Dann ist X ist genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.*

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Setze $E_n := \{x_m \mid m \geq n\}$ und $U_n := X \setminus \overline{E_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{B}((x_n)) = \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist die zu (x_n) gehörige Endstückfilterbasis.
Angenommen, die Folge (x_n) hat keinen Häufungspunkt.
Dann hat auch $\mathcal{B}((x_n))$ keinen Häufungspunkt (vgl. Beispiel I.10.6, 3.), also ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = \varnothing$. Somit ist $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine offenen Überdeckung von X aus abzählbar vielen Mengen. Also existiert eine endliche Menge $K \subseteq \mathbb{N}$ mit $X = \bigcup_{k\in K} U_k$ und somit ist $\bigcap_{k\in K} \overline{E_k} = \varnothing$. Weiter gilt: $\bigcap_{k\in K} \overline{E_k} \supseteq \bigcap_{k\in K} E_k \neq \varnothing$. $\lightning$

$\Leftarrow$ (per Kontraposition) Sei $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine offenen Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Insbesondere existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Nach Konstruktion gilt $x_n \notin U_j$ für alle $j \leq n$. Hätte (x_n) einen Häufungspunkt x, so existierte $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_m$. Es gilt aber $x_n \notin U_m$ für alle $n \geq m$. $\lightning$
Somit hat (x_n) keinen Häufungspunkt.

□

I.13.20 Definition: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein T_2-Raum. Der Raum X heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge enthält.*

I.13.21 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein T_2-Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann gilt: X ist genau dann folgenkompakt, wenn X abzählbar kompakt ist.*

Beweis:

$\Rightarrow$ Folgt aus I.13.20 und I.13.19.

$\Leftarrow$ In Räumen, die das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen gilt nach I.9.4:
Ist x Häufungspunkt eine Folge (x_n) in X, so existiert eine Teilfolge von (x_n), die gegen x konvergiert.
Die Behauptung folgt nun mit I.13.19.

□

I.13.22 Bemerkung: *Kompakte Räume sind im Allgemeinen nicht folgenkompakt (siehe etwa [5] für Beispiele).*

Insgesamt haben wir:

$$
\begin{tikzcd}
\textit{folgenkompakt} \arrow[r, Rightarrow, shift left] & \textit{abzählbar kompakt} \arrow[l, Leftarrow, dashed, shift left, "1.AKA"] \arrow[r, Rightarrow, dashed, shift right, "2.AKA"'] & \textit{kompakt} \arrow[l, Rightarrow, shift right] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \textit{lokal kompakt} \arrow[l, bend right, "Kompaktifizierung"'] \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & \textit{normal} \arrow[r, Rightarrow] & \textit{regulär}
\end{tikzcd}
$$

(AKA=Abzählbarkeitsaxiom)

In metrischen Räumen fallen alle besprochenen Kompaktheitsbegriffe zusammen.

I.13.23 Satz: *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*
(a) X ist kompakt.
(b) X ist abzählbar kompakt.
(c) X ist folgenkompakt.

Beweis: Da jeder metrische Raum das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, folgt nach den bisherigen Ergebnissen die Äquivalenz von (b) und (c).
Wir haben schon bemerkt, dass aus (a) immer (b) folgt.
Wir zeigen nun: Ist X abzählbar kompakt, so existiert eine abzählbare, dichte Teilmenge M von X.
Sei X abzählbar kompakt, d.h. jede Folge in X hat einen Häufungspunkt. Sei $p \in \mathbb{N}$.
Angenommen, für alle endlichen Mengen $K \subseteq X$ existiert $x \in X$ so, dass für alle $y \in K$ die Beziehung $d(x,y) \geq \frac{1}{p}$ gilt.
Sei $x_1 \in X$ und wähle $x_{n+1} \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_{n+1}, x_j) \geq \frac{1}{p}$ für alle $j \in \{1,..,n\}$ gilt. Dann ist (x_n) eine Folge in X, die offensichtlich keinen Häufungspunkt besitzt. $\lightning$
Also existiert eine endliche Menge $K_p \subseteq X$ so, dass zu jedem $x \in X$ ein $y \in K_p$ mit $d(x,y) \leq \frac{1}{p}$ existiert. Setze $M := \bigcup_{p \in \mathbb{N}} K_p$. Dann ist M höchstens abzählbar und $\overline{M} = X$. Folglich ist $\mathcal{B} := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \;\middle|\; x \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf X. Nach I.13.18(b) ist X kompakt. $\square$

I.14. Finaltopologie

Die Finaltopologie erinnert sehr an die Definition der Initialtopologie. In gewissem Sinn ist sie eine „duale“ Konstruktion. Umgangssprachlich bedeutet dual hier, dass wir „Pfeile von Abbildungen umgedrehen“.

I.14.1 Definition: *Seien X und I Mengen. Weiter seien für $i \in I$ seien topologische Räume $(Y_i, \mathcal{O}_i)$ und Abbildungen $f_i \colon Y_i \longrightarrow X$ gegeben. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X heißt Finaltopologie bzgl. $(f_i)_{i \in I}$, falls für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und jede Abbildung $g \colon X \longrightarrow Z$ gilt:*

> *Die Abbildunge g ist genau dann stetig, wenn für jedes $i \in I$ die Abbildung $g \circ f_i : Y_i \longrightarrow Z$ stetig ist.*

Analog zur Initialtopologie notieren wir diesen Sachverhalt in folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(Y_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g \circ f_i"'] & (X, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "g"] \\
& (Z, \mathcal{O}_Z)
\end{tikzcd}$$

I.14.2 Beispiele:

(a) *Ein erstes Beispiel ist uns schon „undercover“ begenet:*
Es seien X und Y topologische Räume, wobei X quasikompakt und Y hausdorffsch sei. Weiter sei $f \colon X \twoheadrightarrow Y$ eine stetige und surjektive Abbildung. Dann ist nach Satz I.7.14 die Topologie auf X eine Finaltopologie bzgl. f.

(b) *Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sind Y_i Unterräume von X für alle $i \in I$, so dass $X = \bigcup_{i \in I} Y_i$ gilt. Wir betrachten nun zwei Situationen, in denen eine Finaltopologie vorliegt.*

(i) *Sind alle Y_i offen in X, so trägt X eine Finaltopologie bzgl. der Inklusionsabbildungen $\iota_i \colon Y_i \hookrightarrow X$. Zunächst sind für alle $i \in I$ die Abbildungen ι_i nach Voraussetzung stetig. Ist die Abbildung $g \colon X \longrightarrow Z$ stetig, so ist natřich auch $g \circ \iota_i$ stetig ist. Ist nun $g \circ f_i = g_{|Y_i}$ stetig und $x \in Y_i \subseteq X$, so ist g stetig in x. Sind für $i \in I$ alle $g \circ f_i$ stetig, so ist nach Satz I.2.11 auch g stetig.*

(ii) *Sind alle Y_i abgeschlossen in X und ist I endlich so trägt X eine Finaltopologie bzgl. der Inklusionsabbildungen $\iota_i \colon Y_i \hookrightarrow X$. Denn ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein topologischer Raum, $g \colon X \longrightarrow Z$ eine Abbildung und sind alle $g \circ f_i$ stetig, so gilt für $i \in I$ und jeden abgeschlossenen Unterraum $A \subseteq X$:*

$$(g \circ f_i)^{-1}[A] = f_i^{-1}[g^{-1}[A]] = g^{-1}[A] \cap Y_i$$

ist ein abgeschlossener Unterraum von Y_i und damit auch ein abgeschlossener Unterraum in X. Somit ist auch

$$g^{-1}[A] = \bigcup_{i \in I} \left(g^{-1}[A] \cap Y_i \right)$$

abgeschlossen in X und die Stetigkeit von g ist nachgewiesen .

I.14.3 Satz: *Existiert eine Finaltopologie $\mathcal{T}$ auf X bzgl. der Abbildungen $(f_i)_{i\in I}$, so ist $\mathcal{T}$ die feinste Topologie auf X bezüglich der jede Abbildung $f_i\colon Y_i \longrightarrow X$ mit $i \in I$ stetig ist. Insbesondere ist $\mathcal{T}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: Die Stetigkeit der f_i ist (wie im Falle der Initialtopologie) einfach nachzuweisen: Wähle $(Z, \mathcal{O}_Z) = (X, \mathcal{T})$ und $g = Id\colon X \longrightarrow X$.
Um zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ die feinste Topologie mit der genannten Eigenschaft ist, nehmen wir an, dass eine Topologie $\mathcal{O}$ existiert, für die jede Abbildung $f_i\colon Y_i \longrightarrow (X, \mathcal{O})$ stetig ist. Sei $g\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O})$ die Idfentität $g(x) = x$. Nach Wahl von $\mathcal{T}$ ist g stetig, d.h. nach Lemma I.2.5 ist $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{O}$, bzw. $\mathcal{O}$ ist gröber als $\mathcal{T}$.

□

I.14.4 Satz: *Seien X und I Mengen. Für $i \in I$ seien topologische Räume $(Y_i, \mathcal{O}_i)$ und Abbildungen $f_i\colon Y_i \longrightarrow X$ gegeben. Betrachte*

$$\mathcal{M}_i := \left\{ O \subseteq X \;\middle|\; f_i^{-1}[O] \in \mathcal{O}_i \right\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{M} := \textstyle\bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$$

die Finaltopologie auf X bzgl. der $(f_i)_{i\in I}$.

Beweis: Das $\mathcal{M}$ eine Topologie ist, folgt daraus, dass f_i^{-1} mit Schnitten und Vereinigungen vertauscht, und $\varnothing = f_i^{-1}[\varnothing]$ sowie $Y_i = f_i^{-1}[X] \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ gilt.
Offensichtlich ist die Abbildung f_i für jedes $i \in I$ nach Konstruktion von $\mathcal{M}$ stetig. Sei weiter $g\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ eine Abbildung. Ist g stetig, so ist die Komposition $g \circ f_i$ stetig für alle $i \in I$. Ist andererseits $g \circ f_i$ für alle $i \in I$ stetig und ist $U \in \mathcal{O}_Z$ beliebig, so gilt für alle $i \in I$:

$$f_i^{-1}\left[g^{-1}[U]\right] = (g \circ f_i)^{-1}[U] \in \mathcal{O}_i.$$

Damit ist $g^{-1}[U] \in \mathcal{M}_i$ für alle $i \in I$, also gilt $g^{-1}[U] \in \mathcal{M}$ und die Stetigkeit der Abbildung g ist gezeigt. □

I.14.5 Beispiele:

(a) *Die folgende Situation ist „dual“zu Beispiel I.5.2 (a):*
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Trägt Y die Finaltopologie $\mathcal{O}_Y$ bzgl. f, so heißt f auch identifizierende Abbildung und $\mathcal{O}_Y$ Identifizierungstopologie bzgl. f.

(b) *Seien eine Menge I und topologische Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ für alle $i \in I$ gegeben. Die topologische Summe $\coprod_{i\in I} X_i$ ist das Koprodukt der Mengen X_i versehen mit der Finaltopologie bzgl. der kanonischen Inklusionen.*
Das Koprodukt $\coprod_{i\in I} X_i := \bigcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})$ ist die disjunkte Vereinigung der X_i und die kanonischen Inklusionen $\iota_k\colon X_k \hookrightarrow \coprod_{i\in I} X_i$ sind durch $i_k(x) = (x, k)$ definiert.

I.15. Quotientenräume

Ist M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, dann wird oft der Quotient $M_{/\sim}$ betrachtet, dessen Elemente genau den Äquivalenzklassen von $\sim$ entsprechen. Wir haben eine kanonische surjektive Abbildung $[\,]_\sim \colon M \longrightarrow M_{/\sim}$, die jedem $m \in M$ seine Äquivalenzklasse $[m]_\sim$ zuordnet.
Ist eine Abbildung $f\colon M \longrightarrow N$ gegeben, so ist auf kanonische Art und Weise eine Äquivalenzrelation $\sim_f$ durch $x \sim_f y :\Longleftrightarrow f(x) = f(y)$ definiert. Ist f surjektiv, so existiert eine Bijektion $b_f\colon M_{/\sim_f} \longrightarrow N$ mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "{[\,]_{\sim_f}}"'] & & N \\ & M_{/\sim_f} \arrow[ur, two heads, tail, "b_f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Eine surjektive Abbildung f wird also vollständig durch die Äquivalenzrelation $\sim_f$ beschrieben. Noch interessanter wird es, wenn M und N zusätzliche Struktur tragen und f diese Struktur erhält. Beispielhaft sei nur an die nützlichen Isomorphiesätze der (linearen) Algebra erinnert. Für topologische Räume machen wir uns diese nützlichen Konzpte durch die folgende Definition nutzbar.

I.15.1 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein toplogischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Betrachte die kanonische Projektion $[\,]_\sim \colon X \longrightarrow X_{/\sim}$.*
Die Quotiententopologie auf $X_{/\sim}$ ist die Finaltopologie auf $X_{/\sim}$ bzgl. $[\,]_\sim$. Die Menge $X_{/\sim}$ zusammen mit dieser Topologie wird Quotientenraum genannt.

I.15.2 Notation: *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X mit Äquivalenzklassen $A_1, ..., A_n$, gilt also*

$$x \sim y :\Longleftrightarrow (x = y) \vee (x, y \in A_1) \vee \cdots \vee (x, y \in A_n),$$

so schreiben wir auch $X_{/(A_1,\cdots,A_n)}$ für $X_{/\sim}$. Einelementige Äquivalenzklassen werden dabei zur Vereinfachung der Notation meist Unterschlagen.

I.15.3 Bemerkung: *Gegeben seien ein topologischer Raum X, eine Menge Y und eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$. Dann Unterscheiden sich die topologischen Räume $\operatorname{Im}(f)$ (versehen mit der Identifizierungstopologie) und $X_{/\sim_f}$ (versehen mit der Quotiententopologie) aus topologischer Sicht nicht. Punkte von $\operatorname{Im}(f)$ sind durch Zusammenfassen (Identifizieren) von Punkten aus X entstanden, wobei dieses Zusammenfassen genau dem Äquivalenzklassenbilden bzgl. $\sim_f$ entspricht. Es exisitert also eine bijektive Abbildung $b_f\colon X_{/\sim_f} \longrightarrow \operatorname{Im}(f)$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "{[\,]_{\sim_f}}"'] & & \operatorname{Im}(f) \subseteq Y \\ & X_{/\sim_f} \arrow[ur, two heads, tail, "b_f"'] & \end{tikzcd}$$

Die Identifizierungstopologie auf $\mathrm{Im}(f)$ *und die Quotiententopologie auf* $X_{/\sim}$ *sind jeweils die feinste Topologie, so dass die Abbildungen* f *und* $[\ ]_{\sim_f}$ *stetig sind. Da* $\mathrm{Im}(f)$ *und* $X_{/\sim}$ *jeweils die Finaltopologie tragen, folgt, dass* b_f *ein Homöomorphismus ist.*

I.15.4 Beispiel: *Wir betrachten auf dem Raum* $X = I = [0;1] \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ *die Äquivalenzrelation* $\sim$*, die durch*

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (x = y) \vee (x = 0 \text{ und } y = 1) \vee (x = 1 \text{ und } y = 0)$$

für $x, y \in X$ *definiert wird. Wie sieht dann* $X_{/\sim}$ *aus ? Da* $\{0;1\}$ *die einzige nicht triviale Äquivalenzklasse ist, legt die Intuition Nahe, dass* $X_{/\sim} = I_{/\sim}$ *homöomorph zu 1-Sphäre* $S^1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x^2 + y^2 = 1\right\} \subseteq (\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{nat})$ *ist.*

Zum Beweis dieser Vermutung betrachten wir die Abbildnung $p\colon I \longrightarrow S^1$ *mit* $x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) \end{pmatrix}$*. Dass* p *surjektiv auf* $]0;1[$*, injektiv und stetig ist, hat man entweder in der Analysis I gezeigt oder zeigt es nun mit den entsprechenden Methoden. Da genau dann* $p(x) = p(y)$ *gilt, wenn* $x \sim y$ *erfüllt ist, haben wir zunächst die Existenz einer bijektiven Abbildung* h *nachgewiesen:*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, two heads, "p"] \arrow[dr, two heads, "{[\ ]_\sim}"'] & & S^1 \\ & I_{/\sim} \arrow[ur, tail, two heads, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Nun tragen I *und* S^1 *Spurtopologie von* $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ *und* p *ist eine stetige Abbildung. Da* $I_{/\sim}$ *die Finaltopologie bzgl* $[\ ]_\sim$ *trägt, ist* $[\ ]_\sim$ *nach Satz I.14.3 stetig. Da weiterhin* $h \circ [\ ]_\sim = p$ *gilt, ist* h *nach Definition der Finaltopologie stetig. Insgesamt ist* h *ist also eine stetige Bijektion.*
Um die Stetigkeit von h^{-1} *zu beweisen gibt es verschiedene Varianten:*

(i) Direktes Nachrechnen der Stetigkeit von h^{-1}*. Das ist vielleicht mühsam und langweilig.*
(ii) Da ein I *quasikompakter und* S^1 *hausdorffscher Raum ist und* $p\colon I \longrightarrow S^1$ *eine surjektive Abbildung ist, folgt aus Satz I.7.14, dass* p *die Bedingung aus der Definition der Finaltopologie erfüllt,* S^1 *trägt also die Finaltopologie bzgl.* p*. Da nun* p *und* $[\ ]_\sim$ *stetige Abbildungen sind und* $p \circ h^{-1} = [\ ]_\sim$ *gilt, folgt mit Satz I.7.14 die Stetigkeit von* h^{-1}*.*
(iii) Da I *ein quasikompakter Raum ist und* $[\ ]_\sim$ *eine stetige und surjektive Abbildung ist, folgt mit Satz I.7.13, dass* $I_{/\sim}$ *ein quasikompakter Raum ist. Da* h *eine bijektive und stetige Abbildung von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorff-Raum ist, ist* h *nach Korollar I.7.15 ein Homöomorphismus.*

Die letzte der drei gegebenen Varianten beweist vielmehr den folgenden Satz:

I.15.5 Satz: *Sei* X *ein quasikompakter topologischer Raum,* Y *und* Z *Hausdorff-Räume und* $\pi_Y\colon X \twoheadrightarrow Y$ *und* $\pi_Z\colon X \twoheadrightarrow Z$ *surjektive Abbildungen, so dass für alle* $x, x' \in X$ *genau dann* $\pi_Y(x) = \pi_Y(x')$ *gilt, wenn* $\pi_Z(x) = \pi_Z(x')$ *gilt. Dann existiert genau eine Bijektion* $h\colon Y \longrightarrow Z$ *mit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, two heads, "\pi_Z"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, two heads, "h"'] & \end{tikzcd}$$

und h ist ein Homöomorphismus.

Im vorhergehenden Satz sind die Voraussetzungen derart, dass Y und Z gerade die Finaltopologie bzgl. der surjektiven Abbildungen π_Y und π_Z tragen. Diese Eigenschaft reicht aus, um die folgende Variante zu beweisen.

I.15.6 Satz: *Seien X, Y und Z topologische Räume und $\pi_Y \colon X \twoheadrightarrow Y$ und $\pi_Z \colon X \twoheadrightarrow Z$ surjektive Abbildungen, so dass Y und Z die Finaltopologie bezüglich π_Y und π_Z tragen und weiterhin für alle $x, x' \in X$ genau dann $\pi_Y(x) = \pi_Y(x')$ gilt, wenn $\pi_Z(x) = \pi_Z(x')$ gilt. Dann existiert genau eine Bijektion $h \colon Y \longrightarrow Z$ mit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, two heads, "\pi_Z"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, two heads, "h"'] & \end{tikzcd}$$

und h ist ein Homöomorphismus.

Zwei elementare und wichtige Konstruktionen sind die Kegelkonstruktion und das Einhängen.

I.15.7 Definition: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Dann ist*

$$CX := (X \times I)_{/(X \times \{1\})}$$

der Kegel über X und

$$\Sigma X := (X \times I)_{/(X \times \{0\}, X \times \{1\})}$$

die Einhängung von X. Das in der Notation verwandte „C“ soll an das englische Wort „cone“, das „Σ“an „suspension“ erinnern.

I.15.8 Beispiel: *Die 1-Sphäre S^1 können wir neben der in Beispiel I.15.4 gegebenen Quotientenkonstruktion auch als Einhängung konstruieren.*
Betrachte die 0-Sphäre $S^0 = \{-1, 1\}$ und $I = [0; 1] \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$. Dann gilt

$$S^0 \times D^1_{/(S^0 \times \{0\}, S^0 \times \{1\})}.$$

Bild ???
Allgemein lassen sich die n-Sphäre $S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\| = 1\right\}$ und der n-Ball $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ durch abkegeln und einhängen konstruieren, siehe Aufgaben.

Wir haben gesehen, dass sich Trennungseigenschaften gut mit der Initialtopologie vertagen, insbesondere vererben sie sich auf Unterräume und Produkträume. Sie vertragen sich jedoch deutlich schlechter mit der Finaltopologie, wie wir nun sehen werden.

I.15.9 Beispiel: *Sei $X = [0;1] \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ und $\sim$ die durch*

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (x = y) \vee (x, y \in \mathbb{Q} \cap [0;1])$$

gegebene Äquivalenzrelation und $\pi\colon X \longrightarrow X_{/\sim}$ die zugehörige kanonische Projektion. Dann ist X ein T_i-Raum, $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$, aber $X_{/\sim}$ ist kein T_i-Raum.

Beweis: Als Unterraum eines metrischen Raumes ist X offensichtlich ein T_i-Raum für $i \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$.

<u>T_1, T_2:</u> Ist $x \in Q \cap [0;1]$, so ist $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{y \in [0;1] \;\mid y \in \mathbb{Q}\}$ nicht abgeschlossen in X. Somit kann $\pi(x) = [x]_\sim$ nicht abgeschlossen sein und folglich ist $X_{/\sim}$ kein T_1-Raum. Insbesondere ist dann natürlich $X_{/\sim}$ kein T_2-Raum.

<u>$T_3, T_{3\frac{1}{2}}$:</u> Ist $y \in [0;1] \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\{\pi(y)\}$ abgeschlossen in $X_{/\sim}$. Für $x \in Q \cap [0;1]$ ist $\pi(x) \neq \pi(y)$, aber jede Umgebung von $\pi(y)$ enthält $\pi(x)$. Also ist $X_{/\sim}$ kein T_3-Raum und insbesondere auch kein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

<u>T_4:</u> Aufgabe 1 der 10. Übung.

$\square$

I.15.10 Satz: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $[\;]_\sim\colon X \longrightarrow X_{/\sim}$ die zugehörige kanonische Projektion. Dann gelten:*

(a) $X_{/\sim}$ ist genau dann ein T_1-Raum, wenn jede Äquivalenzklasse von $\sim$ als Teilmenge von X abgeschlossen ist.

(b) Ist $X_{/\sim}$ ein T_2-Raum, dann ist $\sim$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$.

(c) Sei $[\;]_\sim$ offen. Dann ist $X_{/\sim}$ genau dann hausdorffsch, wenn $\sim$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$ ist.

Beweis:

(a) Aufgabe 2 der 10. Übung.

(b) Bezeichnet $\Delta_\sim$ die Diagonale von $X_\sim$, so gilt $\sim \,=\, ([\;]_\sim \times [\;]_\sim)^{-1}[\Delta_\sim]$. Da die kanonische Projektion $[\;]_\sim$ stetig ist, ist auch $[\;]_\sim \times [\;]_\sim$ stetig und die Behauptung folgt nun aus Satz I.7.4.

(c) Wegen Teil (b) genügt es, zu zeigen, dass $\sim$ abgeschlossen in $X \times X$ die T_2-Eigenschaft für $X_{/\sim}$ impliziert.
Seien $[x]_\sim, [y]_\sim \in X_{/\sim}$ verschieden. Dann gilt für Repräsentanten $x \not\sim y$. Weiter sei $\sim$ abgeschlossen in $X \times X$. Dann existiert eine Umgebung $U \times V$ von (x, y) mit $U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \sim$ und $[U]_\sim$ und $[V]_\sim$ sind disjunkte Umgebungen von $[x]_\sim$ und $[y]_\sim$, da $[\;]_\sim$ offen ist.

$\square$

I.15.11 Satz: *Gegeben seien topologische Räume X, Y und Z und eine surjektive Abbildung $q\colon X \twoheadrightarrow Y$ bezüglich der Y die Finaltopologie trägt. Weiterhin sei Z lokal kompakt. Dann ist $(q \times Id_Z)\colon X \times Z \longrightarrow Y \times Z$ eine surjektive Abbildung und $X \times Z$ trägt bzgl. $q \times \mathrm{Id}_Z$ die Finaltopologie.*

Beweis: Als Produkt stetiger und surjektiver Funktionen ist $q \times \mathrm{Id}_Z$ offenbar stetig und surjektiv.
Somit ist die universelle Eigenschaft der Abbildung $q \times \mathrm{Id}_Z$ nachzuweisen, wobei für eine gegebene stetige Abbildung $g : Y \times Z \longrightarrow Z'$ stets die Stetigkeit von $g \circ (q \times \mathrm{Id}_Z)$ folgt. Es genügt also zu zeigen, dass U eine offene Teilmenge von $Y \times X$ ist, wenn $(q \times \mathrm{Id}_Z)^{-1}[U]$ offen in $X \times Z$. Sei nun $U \subseteq Y \times Z$ mit $\widetilde{U} := (q \times Id_Z)^{-1}[U]$ offen.
Da q surjektiv ist, exisitiert zu jedem $(y, z) \in U$ ein $x \in X$ mit $q(x) = y$ und es gilt $(x, z) \in \tilde{U}$. Da $\widetilde{U}$ offen und Z lokal kompakt ist, existiert eine kompakte Umgebung $K \in \mathcal{U}(z)$ mit $\{x\} \times K \subseteq \widetilde{U}$. Es folgt $\{y\} \times K \subseteq U$. Betrachte nun

$$\widetilde{V} := \left\{ x' \in X \;\middle|\; \{x'\} \times K \subseteq \widetilde{U} \right\} = \left\{ x' \in X \;\middle|\; \{q(x')\} \times K \subseteq U \right\}.$$

Für jedes $x \in \widetilde{V}$ und $k \in K$ existiert eine Umgebung V_k von k, sodass

$$W_k := \left\{ x'' \in X \;\middle|\; \{x''\} \times V_k \subseteq \tilde{U} \right\}$$

eine Umgebung von x' ist. Da K kompakt ist, existieren $k_1, ..., k_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{k_i}$. Dann ist $W := \bigcap_{i=1}^{n} W_{k_i}$ eine Umgebung von x' mit $W \times K \subseteq \tilde{U}$. Folglich ist $W \subseteq \tilde{V}$ und $\tilde{V}$ offen. Setzen wir nun

$$V := \{ y' \in Y \;\mid \{y'\} \times K \subseteq U \} ,$$

so gilt $\tilde{V} = q^{-1}[V]$. Damit ist V offen und $V \times K \subseteq U$ ist eine Umgebung von (y, z). Insbesondere ist U Umgebung jedes seiner Punkte und damit offen. $\square$

I.16. Projektive Räume

Mit Hilfe der Quotientenraumkonstruktion lassen sich viele interessante Beispiele konstruieren. Eine wichtige Beispielklasse sind projektiven Räume.

I.16.1 Definition: *Für $n \in \mathbb{N}$ ist der n-dimensionale (reell-)projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ durch*

$$\mathbb{R}P^n := S^n_{/\sim}$$

definiert, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf S^n durch

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (x = y) \vee (x = -y)$$

gegeben ist.

I.16.2 Bemerkung: *Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ wird oft auch als „Menge der Geraden des $\mathbb{R}^{n+1}$“definiert. Etwas exakter ist damit*

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1}_{/\equiv}$$

mit der Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$x \equiv y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \textit{Es existiert ein } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \textit{ mit } x = \lambda \cdot y$$

gemeint. Beide Definitionen sind gleich, da $S^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})_{/\equiv_*}$, wobei hier $x \equiv_* y$ falls ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $x = \lambda \cdot y$ existiert.

Wir weisen an dieser Stelle auf folgendes allgemeine Prinzip für Identifizierungstopologien hin, das natürlich entsprechend auch für Quotientenräume gilt.

> *Gegeben seien zwei surjektive Abbildungen $f : X \twoheadrightarrow Y$ und $g : Y \twoheadrightarrow Z$, wobei Y und Z die Finaltopologien bzgl. f und g tragen. Dann trägt Z auch die Finaltopologie bzgl. $g \circ f$.*

Die Definition eines reell-projektiven Raumes als Raum der eindimensionalen Unterräume hat den Vorteil, dass er sich leicht verallgemeinert läßt. So ist beispielsweise der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ der Raum der komplex eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^{n+1}$.

I.16.3 Satz: *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ die identifizierende Abbildung, die zur Topologie aus Definition I.16.1 paßt. Dann ist f eine offene Abbildung.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass $f[O] \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}P^n}$ für $O \in \mathcal{O}_{S^n}$ gilt.
Bezeichne mit $\alpha\colon S^n \longrightarrow S^n$ die Antipodalabbildung $x \longmapsto -x$. Offensichtlich ist α ein Homöomorphismus und es gilt für beliebiges $A \subseteq S^n$:

$$f^{-1}[f[A]] = \{y \in S^n \ \mid \exists\, x \in A : x \sim y\} = A \cup \alpha[A].$$

Da $A \cup \alpha[A]$ offen ist, falls $A \in \mathcal{O}_{S^n}$, folgt mit Satz I.14.4, dass $f[A]$ offen ist, falls A offen ist. □

I.16.4 Korollar: *Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist für $n \in \mathbb{N}$ hausdorffsch.*

Beweis: Die Äquivalenzrelation

$$\sim \;=\; \{(x,y) \in S^n \times S^n \;\mid (x=y) \vee (x=-y)\}$$

auf S^n ist offensichtlich abgeschlossen in $S^n \times S^n$. Da die identifizierende Abbildung $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ nach Satz I.16.3 offen ist, folgt die Behauptung aus Teil (c) von Satz I.15.10. $\square$

I.16.5 Bemerkung: *Alternativ hätten wir die Hausdorffeigenschaft im gerade bewiesenen Korollar natürlich auch direkt zeigen können.*

I.16.6 Satz: *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\} \subseteq (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{nat})$. Betrachte auf der n-dimensionalen Kreisscheibe D^n die Äquivalenzrelation $\sim$, die durch*

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (x=y) \vee (x,y \in S^n \text{ und } x=-y)$$

gegeben ist. Dann ist $D^n_{/\sim}$ homöomorph zu $\mathbb{R}P^n$.

Beweis: Betrachte die Abbildung $h\colon D^n \longrightarrow S^n$ mit

$$(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$$

mit $x_{n+1} := \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}$, die Abbildung h „hebt die Punkte von D^n auf die nördliche Hemisphäre der S^n“. Man rechnet leicht nach, dass h ein Homöomorphismus ist. Da die Kreisscheibe D^n kompakt und S^n hausdorffsch ist, trägt $\mathrm{Im}(h)$ die Finaltopologie bzgl. h. Ist $[\;]_{\mathbb{R}P^n} : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ die identifizierende Abbildung, die zur Finaltopologie aus Definition I.16.1 passt, so ist $\left(([\;]_{\mathbb{R}P^n})^{-1}[M]\right) \cap \mathrm{Im}(h) \neq \varnothing$ für alle $M \subseteq \mathbb{R}P^n$. Damit folgt, dass $\mathbb{R}P^n$ auch bzgl. $[\;]_{\mathbb{R}P^n} \circ h$ die Finaltopologie trägt. Da schließlich

$$[\;]_\sim(x) = [\;]_\sim(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ([\;]_{\mathbb{R}P^n} \circ h)(x) = ([\;]_{\mathbb{R}P^n} \circ h)(y)$$

für alle $x, y \in D^n$ gilt, folgt die Behauptung mit Satz I.15.6. $\square$

I.17. Verkleben und CW-Komplexe

I.17.1 Definition: *Seien* $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ *topologische Räume,* $A \subseteq X$ *ein abgeschlossener Unterraum und* $f \colon A \longrightarrow Y$ *eine Abbildung. Betrachte auf der disjunkten Vereinigung* $X \sqcup Y$ *die Äquivalenzrelation* $\sim$*, die durch*

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x = y) \vee \left({x,y\in A \atop \text{und } f(x)=f(y)} \right) \vee \left({x\in A,\ y\in f[A] \atop \text{und } f(x)=y} \right) \vee \left({x\in f[A],\ y\in A \atop \text{und } f(y)=x} \right)$$

definiert ist. Wir sagen, dass der Quotientenraum $(X \cup Y)_{/\sim}$ *durch Zusammenkleben von* X *und* Y *mittels* f *entstanden ist und schreiben* $X \cup_f Y$.

I.17.2 Beispiele:

(a) Betrachte die Mengen
$X := [-1; 1]$,
$A := \{-1; 1\}$,
$Y := [3; 5]$
und die Funktion
$f \colon A \longrightarrow Y$ *mit* $-1 \longmapsto 5$ *und* $1 \longmapsto 3$.
Dann ist $X \cup_f Y$ *homöomorph zu* S^1.

(b) Für S_i *wie in Beispiel I.6.13 (b) betrachte*
$X := \bigcup_{i=1}^{10} S_i$
$A := \left\{ \binom{1}{0},\ \binom{1/2}{0},\ \binom{1/3}{0},\ \cdots,\ \binom{1/10}{0} \right\}$,
$Y := \left\{ \binom{y}{10} \ \middle|\ y \in [3; 4] \right\}$
und die Funktion
$f : A \longrightarrow Y$ *mit* $\binom{1/i}{0} \longmapsto \binom{3}{10}$.
Dann ist $X \cup_f Y$ *homöomorph zu zehn Strecken, die sich alle in genau einem ihrer Endpunkte schneiden.*

I.17.3 Definition:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ *bezeichne* D^n *die abgeschlossenen Einheitskugel in* $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$, $e^n := Int(D^n)$ *und* $S^{n-1} := D^n \setminus e^n$. *Die Unterräume* D^n, e^n, S^{n-1} *und alle zu ihnen homöomorphe Räume heißen n-dimensionaler Ball (oder kurz n-Ball), n-dimensionale Zelle (n-Zelle) und* $(n-1)$*-dimensionale Sphäre* $((n-1)$*-Sphäre).*

(b) Ist X *ein topologischer Raum und* $f \colon S^{n-1} \longrightarrow X$ *eine Abbildung, so sagen wir auch, dass* $X \cup_f D^n$ *durch ankleben einer n-Zelle mittels* f *entstanden ist. Manche Autoren schreiben hier auch* $X \cup_f e^n$.

I.17.4 Bemerkung: *Für* $f : S^{n-1} \longrightarrow X$ *sei* $p \colon X \sqcup D^n \longrightarrow X \cup_f D^n$ *die kanonische Projektion. Dann ist* $p_{|e^n}$ *ein Homöomorphismus zwischen* e^n *und* $p[e^n]$. *Identifizierungen erfolgen bein Ankleben einer n-Zelle also nur auf dem Rand der anzuklebenden Zelle, niemals in ihrem Inneren. Erfolgt auch auf dem Rand keine Identifizierung, ist die Verklebeabbildung* f *also ein Homöomorphismus, so wird oft auch von einer regulären Verklebung gesprochen.*

I.17.5 Beispiele:

(a) *Zunächst bemerken wir, dass* D^0 *eine homöomorph zur einelementige Menge* $\{*\}$ *ist. Betrachte nun die Mengen*
$X := D^n, \ (n \in \mathbb{N}),$
$Y := \{*\}$
und die Funktion
$f\colon S^{n-1} \longrightarrow \{*\}.$
Dann ist $X \cup_f Y$ *homöomorph zur* S^n*, das heißt, dass man durch Ankleben einer* n*-Zelle an einen* 0*-Ball eine* $(n-1)$*-Sphäre erhält.*

(b) *Betrachte die Mengen*

$$X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \begin{smallmatrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{smallmatrix} \right\},$$

$$A = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X \ \mid x \in \{0,1\}\},$$

$$Y = [0;1]$$

und die Funktion $f\colon A \longrightarrow Y$ *mit*

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \begin{cases} y & \textit{falls } x = 0, \\ 1 - y & \textit{falls } x = 1. \end{cases}$$

Dann ist $X \cup_f Y$ *homöomorph zum Möbiusband.*

(c) *Betrachte die Mengen*
$X = D^2,$
$Y =$ *Möbiusband.*
Da der Rand ∂Y *des Möbiusbandes homöomorph zu* S^1 *ist, können wir an das Möbiusband eine* 2*-Zelle ankleben. Betrachte dazu einen beliebigen Homöomorphismus* $f\colon S^1 \longrightarrow \partial Y$.

Man kann nun zeigen, dass $Y \cup_f D^2$ *homöomorph zum reell-projektiven Raum* $\mathbb{R}P^2$ *ist.*

I.17.6 Bemerkung: *Aus der Differentialgeometrie wissen wir, dass das Möbiusband eine glatte, nicht orientierbare zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist. Für die Begriffe glatte Mannigfaltigkeit und Orientierbarkeit werden in der Differentialgeometrie Ableitungen von Funktionen benötigt.*
Die Begriffe haben topologische Pendants, die ohne den Begriff der Ableitung definiert werden können. So ist eine n*-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* M *ein hausdorffscher Raum mit einer abzählbaren Basis, so dass jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Menge des Halbraums* $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \mid x_n \ge 0\}$ *ist. Mit Hilfe des Begriffs der Homologiegruppen läßt sich nun auch eine Orientierung auf* M *definieren, die einer Orientierung einer glatten Mannigfaltigkeit entspricht, falls die Mannigfaltigkeit zufälligerweise glatt sein sollte.*

I.17.7 Definition: *Sei* I *eine Indexmenge. Für jedes* $i \in I$ *betrachten wir* *einen n-Ball $D^n \times \{i\}$ und eine stetige Abbildung $f_i\colon S^{n-1} \times \{i\} \longrightarrow X$ in einen topologischen Raum X. Dann ist*

$$S^{n-1}_I := \bigcup_{i\in I} S^{n-1} \times \{i\}$$

ein Unterraum von $D_I = \bigcup_{i\in I} D^n \times \{i\}$ und $f(x,i) := f_i(x)$ definiert eine stetige Abbildung $f\colon S^{n-1}_I \longrightarrow X$.
Wir sagen, dass $X' := X \cup_f D^n_I$ aus X durch Ankleben der n-Zellen $e^n \times \{i\}$, $i \in I$, entsteht.

I.17.8 Definition:
(a) Ein endlicher CW-Komplex X ist eine endliche Folge von (in X) abgeschlossenen Unterräumen $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_N$, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:
  (i) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$
  (ii) $(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ ist ein diskreter topologischer Raum.
  (iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist X_n aus X_{n-1} durch Ankleben von endlich vielen n-Zellen entstanden.

  Die Unterräume X_k werden auch k-Skelett von X genannt.
(b) Die Dimension eines endlichen CW-Komplexes ist die maximale Dimension einer n-Zelle, die angeklebt wird.

I.17.9 Bemerkung: *Beide Endlichkeitsforderungen (endliche Folge von Unterräumen und endlich viele Zellen, die an jedes k-Skelett angeklebt werden dürfen) können weggelassen werden. Damit dann jedoch sinnvolle Resultate erzielt werden können, muss eine Forderung an die auftretenden Topologien gestellt werden. Die Bezeichnung CW-Komplex rührt daher. Das „C“ steht für „closure finite“. Das bedeutet, dass der Rand eines jeden n-Balls nur eine endliche Zahl von p-Zellen mit $p < n$ trifft. Das „W“ steht für „weak topology“. Darunter versteht man, dass $A \subseteq X$ genau dann in X abgeschlossen ist, wenn $A \cap X_k$ für jedes k in X_k abgeschlossen ist.*

CW-Komplexe wurden von J. H. C. Whitehead 1949 eingeführt, [6]. Sie sind ein extrem nützliches und wichtiges Konzept. Gute und umfassende Monographien über CW-Komplexe sind Lundell&Weingram, [4], und Cooke&Finney, [2].

Literaturverzeichnis

[1] M. Aigner & G. M. Ziegler, *Das Buch der Beweise*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[2] G. E. Cooke & R. L. Finney, *Homology of Cell Complexes*, Princeton University Press, Princeton, 1969.

[3] K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[4] A. T. Lundell & S. Weingram, *The Topology of CW complexes*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.

[5] B. v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[6] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I*, Bull. Am. Math. Soc. **55** (1949), 213–245.