Skript zur Vorlesung
Topologie I

Carsten Lange, Heike Siebert
Richard-Sebastian Kroll

Faszikel 1
Fehler und Kommentare bitte an
clange@math.fu-berlin.de
Stand: 15. Juni 2010

Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin

Sommersemester 2010

Inhaltsverzeichnis

I. Grundbegriffe der mengetheoretischen Topologie

I.1. Topologische Räume

I.1.1 Definition: *Es seien X eine Menge und $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

(a) $\mathcal{O}$ heißt Topologie auf X, falls folgende Aussagen gelten:
   (i) Gilt $O_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$ einer beliebigen Indexmenge, so ist deren Vereinigung $\bigcup_{i \in I} O_i$ ebenfalls in $\mathcal{O}$.
   (ii) Gilt $O_1, \cdots, O_n \in \mathcal{O}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und folgt $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$.

(b) Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, wobei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf der Menge X ist.

(c) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt offen in $(X, \mathcal{O})$, falls $M \in \mathcal{O}$ gilt.

(d) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls eine Teilmenge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O$ und $O \subseteq U$ existiert.

(e) Für $A \subseteq X$ heißt eine Teilmenge $U \subseteq X$ Umgebung von A, falls U eine Umgebung für alle $x \in A$ ist.

I.1.2 Bemerkung: *Manche Definition einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X fordert scheinbar zusätzlich $\varnothing \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$. Das ist allerdings mehr eine Frage, ob man die leere Menge als Indexmenge für beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte erlaubt. Wir tun dies und folgen dabei der Konvention:*

$$\varnothing = \bigcup_{i \in \varnothing} O_i \qquad \text{und} \qquad X = \bigcap_{i \in \varnothing} O_i.$$

Diese Konvention bedeutet natürlich nicht, dass bei einem konkreten Kanditaten einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X nicht $\varnothing \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$ überprüft werden muss.

I.1.3 Beispiele: *Die folgenden Paare $(X, \mathcal{O})$ sind topologische Räume:*

(a) Indiskrete oder triviale Topologie $\mathcal{O}_{ind}$:
   Für eine beliebige Menge X ist $\mathcal{O}_{ind} = \{\varnothing, X\}$.

(b) Diskrete Topologie $\mathcal{O}_{dis}$:
   Für eine beliebige Menge X ist $\mathcal{O}_{dis} = \mathcal{P}(X)$.

(c) Für die reellen Zahlen $X = \mathbb{R}$ betrachte $\mathcal{O} = \{\ ]-\infty; a[\ \mid a \in \mathbb{R} \cup \pm\infty\}$.

(d) Natürliche Topologie $\mathcal{O}_{nat}$ der reellen Zahlen:
   Für die reellen Zahlen $X = \mathbb{R}$ ist

$$\mathcal{O}_{nat} = \left\{ M \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{c} M \text{ ist Vereinigung von Intervallen} \\ \text{des Typs }]a;b[\text{ mit } a \leq b \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

(e) Für die reellen Zahlen $X = \mathbb{R}$ betrachte

$$\mathcal{O} = \left\{ M \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{c} M \text{ ist Vereinigung von Intervallen} \\ \text{des Typs }]-\infty;a[\text{ mit } a \in \mathbb{R} \cup -\infty \end{array} \right\}.$$

(f) Ordnungstopologie $\mathcal{O}_{ord}$ einer total geordneten Menge:
   Zu einer total geordneten Menge $(X, <)$ betrachte zunächst

$$\mathcal{S} := \left\{ \begin{array}{l} \{x \in X \mid x < a\}, \\ \{x \in X \mid a < x\} \end{array} \;\middle|\; a \in X \right\}.$$

Durch

$$\mathcal{O}_{ord} := \left\{ M \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{c} M \text{ ist Vereinigung endlicher} \\ \text{Schnitte von Mengen aus } \mathcal{S} \end{array} \right\}$$

ist eine Topologie auf X gegeben.

(g) *Durch eine Metrik d induzierte Topologie $\mathcal{O}_d$:*
Auf einem metrischen Raum (X,d) ist durch

$$\mathcal{O}_d = \left\{ M \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{c} M \text{ ist ist Vereinigung} \\ \text{offener Kugeln in } (X,d) \end{array} \right\}$$

eine Topologie definiert. Verschiedene, aber äquivalente Metriken induzieren dieselbe Topologie auf X.

I.1.4 Definition: *Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum.*
(a) *Ein System $\mathcal{B}$ offener Mengen von $(X,\mathcal{O})$ heißt Basis von $\mathcal{O}$, falls jede offene Menge von $(X,\mathcal{O})$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.*
(b) *Ein System $\mathcal{S}$ offener Mengen von $(X,\mathcal{O})$ heißt Subbasis von $\mathcal{O}$, falls jede offene Menge von $(X,\mathcal{O})$ Vereinigung endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ ist.*

I.1.5 Beispiele: *Basen und Subbasen haben wir schon in I.1.3 gesehen.*

I.1.6 Satz und Definition: *Für eine Menge X sei $\mathcal{B}$ eine Familie von Teilmengen von X, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:*
(a) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.
(b) *Für alle $B, B' \in \mathcal{B}$ und alle $x \in B \cap B'$ existiert ein $B'' \in \mathcal{B}$, so dass $x \in B'' \subseteq B \cap B'$.*
Setze

$$\mathcal{O} := \left\{ M \in \mathcal{B} \;\middle|\; \begin{array}{c} M \text{ ist Vereinigung} \\ \text{von Elementen aus } \mathcal{B} \end{array} \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}$. Ist $\mathcal{O}'$ eine Topologie mit Basis $\mathcal{B}$, so ist $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. $\mathcal{O}$ heißt die durch $\mathcal{B}$ definierte Topologie.

I.1.7 Definition: *Seien $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ und $x \in X$. Die Menge $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x heißt Umgebungssystem von x.*

I.1.8 Lemma: *Seien $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Für das Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$ gilt:*
(a) *Für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und $U \subseteq U'$ gilt $U' \in \mathcal{U}(x)$.*
(b) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}(x)$ gilt $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}(x)$.*
(c) *Für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $x \in U$.*
(d) *Für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$.*

Beweis: (a)-(c) folgen sofort aus der Definition. Für (d) benutze die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
(i) O ist offen.
(ii) O ist Umgebung jedes seiner Punkte.
(iii) Für alle $x \in O$ existiert eine Menge $U \in \mathcal{U}(x)$, so dass O offen ist.

□

I.1.9 Satz: *Sei X eine Menge. Ist jedem $x \in X$ ein System $\mathcal{U}(x)$ von Teil-*

mengen von X zugeordnet, welche die Eigenschaften (a)-(d) aus Lemma I.1.8 erfüllen, so existiert genau eine Topologie auf X, für die $\mathcal{U}(x)$ das Umgebungssystem von x ist.

Beweis: Es sind Existenz und Eindeutigkeit der Topologie zu zeigen.
Eindeutigkeit: Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ zwei Topologien, so dass $\mathcal{U}(x)$ ein Umgebungssystem für jedes $x \in X$ ist. Ist $O \in \mathcal{O}_1$ beliebig gewählt, dann ist O eine Umgebung von x (bezüglich $\mathcal{O}_1$) für jedes $x \in O$. Folglich ist $O \in \mathcal{U}(x)$ für jedes $x \in O$ und somit ist O eine Umgebung von x (bezüglich $\mathcal{O}_2$) für jedes $x \in O$. Für jedes $x \in O$ exitiert dann ein $O_x \in \mathcal{O}_2$ mit $O_x \subseteq O$. Damit folgt $O = \bigcup_{x \in X} O_x \in \mathcal{O}_2$ und somit gilt $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$. Die Inklusion $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ folgt aus demselben Argument, wobei die Rolle von $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ vertauscht wird.

Existenz: Wir definieren zunächst eine Topologie auf X. Dies geschieht durch

$$\mathcal{O} := \{O \subseteq X \ \mid O \in \mathcal{U}(x) \text{ für alle } x \in O\}.$$

Dass $\mathcal{O}$ tatsächlich eine Toplogie ist, folgt aus den Eigenschaften (a) und (b). Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{U}(x)$ auch wirklich das Umgebungssystem $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$ für jedes $x \in X$ bezüglich $\mathcal{O}$ ist.

$\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$: Sei $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$ Umgebung eines gewählten $x \in X$ bezüglich $\mathcal{O}$. Dann existiert eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $x \in O \subseteq U$. Nach Definition von $\mathcal{O}$ gilt auch $O \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in O$, also insbesondere für x. Eigenschaft (a) impliziert nun $U \in \mathcal{U}(x)$.

$\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x) \supseteq \mathcal{U}(x)$: Seien $U \in \mathcal{U}(x)$ für gewähltes $x \in X$ und $\widetilde{U} := \{y \ \mid U \in \mathcal{U}(y)\}$. Zu zeigen ist, dass U eine Umgebung von x bezüglich $\mathcal{O}$ ist. Es genügt nun, $x \in \widetilde{U}$, $\widetilde{U} \subseteq U$ und $\widetilde{U} \in \mathcal{O}$ zu zeigen. Aus der Definition von $\widetilde{U}$ und aus Eigenschaft (c) folgen sofort $x \in \widetilde{U}$ und $\widetilde{U} \subseteq U$. Aus Eigenschaft (d) folgt die Existenz von $V \in \mathcal{U}(y)$ für beliebig vorgegebenes $y \in \widetilde{U}$, so dass $U \in \mathcal{U}(z)$ für alle $z \in V$ gilt. Damit ist $V \subseteq \widetilde{U}$ gezeigt und es folgt $\widetilde{U} \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in \widetilde{U}$. Das zeigt aber $\widetilde{U} \in \mathcal{O}$. Insgesamt gilt also $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(x)$. □

I.1.10 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Teilsystem $\mathcal{B}(x)$ des Umgebungssystems $\mathcal{U}(x)$ heißt Umgebungsbasis von x, falls zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $B \subseteq U$ existiert.*

I.1.11 Beispiel: *Im metrischen Raum (X, d) bilden für alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ die offenen Bälle $B_{\frac{1}{n}}(x) = \left\{y \in X \ \middle| \ d(x,y) < \frac{1}{n}\right\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie.*

I.1.12 Definition: *Der topologische Raum $(X, \mathcal{O})$ erfüllt das*
(a) erste Abzählbarkeitsaxiom, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt,
(b) zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis hat.

I.2. Stetigkeit

I.2.1 Definition: *Gegeben seien topologische Räume* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$*. Eine Abbildung* $f\colon X \longrightarrow Y$ *heißt stetig, wenn* $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$ *für alle offenen Mengen* $O \in \mathcal{O}_Y$ *gilt.*

Betrachten wir eine Abbildung $f : X \longrightarrow X$ und möchten wir verschiedene Topologien auf dem Definitionsbereich und auf der Bildmenge kenntlich machen, so schreiben wir abkürzend $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \widetilde{\mathcal{O}}_X)$.

I.2.2 Beobachtung: *Sind* $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ *und* $g\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ *stetige Abbildungen, so ist auch* $g \circ f\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ *stetig.*

I.2.3 Satz: *Eine Abbildung* $f\colon X \longrightarrow Y$ *ist genau dann stetig, wenn* $f^{-1}[S]$ *für eine beliebige Subbasis* $\mathcal{S}_Y$ *von* $\mathcal{O}_Y$ *und alle* $S \in \mathcal{S}_Y$ *eine offene Menge in* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ist.*

Beweis: Sei $\mathcal{S}_Y$ eine Subbasis von $\mathcal{O}_Y$.
$\underline{\Rightarrow}$: Die Behauptung folgt sofort aus $\mathcal{S}_Y \subseteq \mathcal{O}_Y$.
$\underline{\Leftarrow}$: Sei $A \in \mathcal{O}_Y$. Dann gibt es $A_{i,k} \in \mathcal{S}_Y$ mit

$$A = \bigcup_{i\in I} \left(\bigcap_{k=1}^{j_i} A_{i,k} \right)$$

für eine geeignete Indexmenge I und natürliche Zahlen j_i für alle $i \in I$. Da allgemein für Abbildungen

$$f^{-1}[A] = f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} \left(\bigcap_{k=1}^{j_i} A_{i,k} \right) \right] = \bigcup_{i\in I} \left(\bigcap_{k=1}^{j_i} f^{-1}[A_{i,k}] \right)$$

gilt, folgt $f^{-1}[A] \in \mathcal{O}_X$ aus $f^{-1}[S] \in \mathcal{O}_X$ für alle $S \in \mathcal{S}_Y$. □

I.2.4 Definition: *Sind* $\mathcal{O}_X$ *und* $\widetilde{\mathcal{O}}_X$ *Topologien auf* X*, dann heißt* $\mathcal{O}_X$ *feiner als* $\tilde{\mathcal{O}}_X$*, wenn* $\widetilde{\mathcal{O}}_X \subseteq \mathcal{O}_X$ *gilt. Wir sagen auch, dass* $\widetilde{\mathcal{O}}_X$ *gröber als* $\mathcal{O}_X$ *ist.*

I.2.5 Lemma: *Seien* $(X, \mathcal{O}_X), (X, \tilde{\mathcal{O}}_X)$ *gegeben. Die Topologie* $\mathcal{O}_X$ *ist genau dann feiner als* $\tilde{\mathcal{O}}_X$*, wenn* $Id_X\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}}_X)$ *stetig ist.*

Beweis: Die Stetigkeit der Identität $Id_X\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \tilde{\mathcal{O}}_X)$ ist äquivalent zu der Aussage $O \in \tilde{\mathcal{O}}_X$ impliziert $O \in \mathcal{O}_X$. □

I.2.6 Definition: *Seien topologische Räume* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *gegeben. Eine Abbildung* $f\colon X \longrightarrow Y$ *heißt offen, falls* $f[O] \in \mathcal{O}_Y$ *für alle* $O \in \mathcal{O}_X$ *gilt.*

I.2.7 Satz: *Eine Abbildung* $f\colon X \longrightarrow Y$ *ist genau dann offen, wenn* $f[B] \in \mathcal{O}_Y$ *für eine beliebige Basis* $\mathcal{B}_X$ *von* $\mathcal{O}_X$ *und alle* $B \in \mathcal{B}_X$ *gilt.*

Beweis: Folge der Beweisidee zu Satz I.2.3.

I.2.8 Bemerkung: *In Satz I.2.7 können wir die Basis* $\mathcal{B}_X$ *nicht durch eine*

Subbasis $\mathcal{S}_X$ ersetzen, da im Allgemeinen $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$ gilt.

I.2.9 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine bijektive Abbildung $f \colon X \longrightarrow Y$ heißt Homöomorphismus, wenn f und f^{-1} stetig sind. Existiert ein Homöomorphismus zwischen X und Y, so heißen die topologischen Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$homöomorph.*

Eine wichtige Frage in der Topologie ist es zu entscheiden, ob zwei Räume homöomorph sind.

I.2.10 Definition: *Seien topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ gegeben. Eine Abbildung $f \colon X \longrightarrow Y$ heißt stetig in $x \in X$, wenn das Urbild $f^{-1}[U]$ für jede Umgebung U von $f(x)$ eine Umgebung von x ist.*

I.2.11 Satz: *Eine Abbildung $f \colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn f in jedem $x \in (X, \mathcal{O}_X)$ stetig ist.*

I.2.12 Satz: *Eine Abbildung $f \colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig in $x \in (X, \mathcal{O}_X)$, wenn zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x mit $f[U] \subseteq V$ existiert.*

Beweis: Seien $x \in X$ und V eine Umgebung von $f(x)$.
$\Rightarrow$: Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x ist. Setze $U = f^{-1}[V]$.
$\Leftarrow$: Sei U eine Umgebung von x mit $f[U] \subseteq V$. Dann gilt auch $f^{-1}[V] \supseteq U$ und somit ist $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x. □

I.2.13 Bemerkung: *Das Analogon der punktweisen Definition I.2.10 der Stetigkeit ist die übliche Definition der Stetigkeit in der Analysis und in der Theorie der metrischen Räume. Tatsächlich gilt für metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) mit induzierten Topologien $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$, dass folgende Aussagen äquivalent sind:*
(a) Die Abbildung $f \colon (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ ist stetig in $x \in X$.
(b) Die Abbildung $f \colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist stetig in $x \in X$.

Beweis: Nach Satz I.2.12 genügt es, die topologische Stetigkeit in x bezüglich eines Umgebungssystems oder einer Umgebungsbasis zu betrachten.
$\Rightarrow$: Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass der offene ε-Ball $B_\varepsilon(f(x))$ vollständig in V enthalten ist. Aus der Stetigkeit in metrischen Räumen folgt nun, dass ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$ existiert.
$\Leftarrow$: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $B_\varepsilon(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$ ist, folgt aus der Stetigkeit von f in x die Existenz einer Umgebung U von x mit $f[U] \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. Da U eine Umgebung von x ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$. Somit gilt $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. □

I.2.14 Bemerkung: *Oft genügt es (und oft ist es bequemer) eine Eigenschaft lediglich für eine Umgebungsbasis oder ein Umgebungssystem statt für das gesamte System $\mathcal{O}_X$ offener Mengen nachzuweisen. Der Beweis von I.2.13 kann beispielsweise auf folgende Situation angepasst werden:*

> *Seien $f\colon (X, \mathcal{O}_x) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Funktion und $x \in X$. Seien weiterhin $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Umgebungsbasen für x und $f(x)$. Die Abbildung f ist genau dann stetig in x, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{B}'$ ein $U \in \mathcal{B}$ mit $f[U] \subseteq V$ gibt.*

I.3. Abgeschlossene Mengen

I.3.1 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ und $x \in X$.*
(a) M ist eine abgeschlossene Menge von $(X, \mathcal{O}_X)$, falls $X \setminus M \in \mathcal{O}_X$.
(b) x ist ein Berührpunkt von M, falls jede Umgebung von x einen nicht leeren Durchschnitt mit M hat.
(c) Der Abschluß $\overline{M} = \mathrm{cl}(M)$ von M ist die Menge aller Berührpunkte von M.
(d) x heißt innerer Punkt von M, falls M Umgebung von x ist.
(e) Das Innere $Int(M) = \mathring{M}$ ist die Menge aller inneren Punkte von M.
(f) x ist ein Randpunkt von M, wenn x Berührpunkt von M und $X \setminus M$ ist.
(g) Der Rand ∂M von M ist die Menge aller Randpunkte von M.
(h) M ist dicht in X, wenn $\overline{M} = X$.
(i) M ist nirgends dicht, wenn $Int(\overline{M}) = \varnothing$.

Da die Beweise der nächsten beiden Sätze lediglich auf den Rechenregeln für Komplementbildung in Verbindung mit Durchschnitten und Vereinigungen basieren, werden sie ausgelassen.

I.3.2 Satz: *Für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ gilt:*
(a) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
(b) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Der folgende Satz zeigt uns, dass eine Topologie auch die Angabe der abgeschlossenen Mengen charakterisiert wird.

I.3.3 Satz: *Seien X eine Menge, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{A} := \{M \subseteq X \mid X \setminus M \in \mathcal{O}\}$. Dann definiert $\mathcal{O}$ genau dann eine Topologie auf X, wenn gilt:*
(a) Ist I eine Indexmenge und $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in I$, so folgt $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.
(b) Sind $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

I.3.4 Definition: *Eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt genau dann abgeschlossen, wenn für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ auch $f[A]$ abgeschlossen ist.*

I.3.5 Satz: *Eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig, wenn für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq Y$ auch $f^{-1}[A]$ abgeschlossen ist.*

Beweis: Ist $A \subseteq Y$ abgeschlossen, so ist nach Definition $Y \setminus A$ offen. Weiterhin gilt:

$$f^{-1}[Y \setminus A] = f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[A] = X \setminus f^{-1}[A].$$

$\underline{\Rightarrow}$: Ist f stetig, so ist $X \setminus f^{-1}[A]$ offen und somit $f^{-1}[A]$ abgeschlossen.
$\underline{\Leftarrow}$: Ist $f^{-1}[A]$ abgeschlossen, so ist $X \setminus f^{-1}[A]$ offen in $(X, \mathcal{O}_X)$ und somit ist $f^{-1}[Y \setminus A]$ offen in $(X, \mathcal{O}_X)$. Das bedeutet gerade, dass f stetig ist. $\square$

I.4. Unterräume & endliche Produkte

I.4.1 Satz und Definition: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ und $\mathcal{O}_Y := \{O \cap Y | O \in \mathcal{O}_X\}$.*
Dann ist $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein topologischer Raum, den wir auch Unterraum von $(X, \mathcal{O}_X)$ nennen. $\mathcal{O}_Y$ heißt die Unterraumtopologie oder induzierte Topologie (gelegentlich auch Spurtopologie) von Y in X.

I.4.2 Bemerkung: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und Y ein Unterraum von X.*

(a) Offensichtlich ist $M_Y \subseteq Y$ eine offene Menge von Y, falls $M_Y = M_X \cap Y$ für eine offene Menge $M_X \subseteq X$. Offene Teilmengen von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sind im Allgemeinen nicht offen in $(X, \mathcal{O}_X)$. Dies gilt jedoch, falls Y offen in X ist. Diese Aussagen gelten entsprechend, wenn wir stets offen durch abgeschlossen ersetzen.

(b) Die Unterraumtopologie von Y ist die gröbste Topologie auf Y, so dass die Inklusionsabbildung $i\colon Y \longrightarrow X$ mit $y \longmapsto y$ stetig ist.

I.4.3 Lemma: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ ein Unterraum mit der Spurtopologie $\mathcal{O}_Y$, $i\colon Y \longrightarrow X$ die Inklusion und $g\colon Z \longrightarrow Y$ für einen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$.*
Dann ist g genau dann stetig, wenn $i \circ g\colon Z \longrightarrow X$ stetig ist.

Beweis:
$\underline{\Rightarrow:}$ Ist g stetig, so folgt mit Teil (b) von Bemerkung I.4.2 die Stetigkeit von $i \circ g$.
$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $i \circ g$ stetig. Dann gilt nach Definition der Stetigkeit, dass $(i \circ g)^{-1}[O] \in \mathcal{O}_Z$ für alle $O \in \mathcal{O}_X$ gilt. Weiterhin gilt

$$g^{-1}[O \cap Y] = g^{-1}[i^{-1}[O]] = (i \circ g)^{-1}[O] \in \mathcal{O}_Z \text{ für alle } O \in \mathcal{O}_X.$$

Da jede offene Menge von Y von der Form $O \cap Y$ für ein $O \in \mathcal{O}_X$ ist, ist die Stetigkeit von g gezeigt. $\square$

I.4.4 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt Einbettung von X in Y, wenn $f\colon X \to Im(f)$ ein Homöomorphismus von X auf den Unterraum $Im(f)$ von Y ist.*

I.4.5 Satz: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann eine Einbettung, wenn f injektiv und stetig ist und $f[U]$ für alle $U \in \mathcal{O}_X$ offen im Unterraum $Im(f)$ ist.*

I.4.6 Satz und Definition: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Die Produkttopologie $\mathcal{O}_{X\times Y}$ auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ ist die durch das Mengensystem*

$$\mathcal{B}_{X\times Y} := \{U \times V \ | \ U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$$

definierte Topologie mit Basis $\mathcal{B}_{X\times Y}$. Wir nennen $(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ das Produkt von $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und schreiben dafür auch kurz $X \times Y$.

Beweis: Man rechnet nach, dass die Bedingungen an das Mengensystem $\mathcal{B}_{X\times Y}$ aus Satz und Definition I.1.6 erfüllt sind. $\square$

I.4.7 Bemerkung: *Damit haben wir auch endliche Produkte von topologischen Räumen durch wiederholtes Anwenden von Satz und Definition I.4.6 definiert. Die Konstruktion ist in folgendem Sinn mit der Konstruktion eines Produkts endlich vieler metrischer Räume verträglich. Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so kann auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ eine Produktmetrik d definiert werden. Eine mögliche Definition ist*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\},$$

wobei andere Wahlen, die äquivalente Metriken liefern, genauso gut sind. Wir können nun die von der gewählten Produktmetrik d induzierte Topologie mit der in Definition I.4.6 definierten Produkttopologie der von den Metriken induzierten Topologien vergleichen. Es stellt sich heraus, dass beide Topologien gleich sind. Für eine endliche Indexmenge I kommutiert somit das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}(X_i, d_i) \text{ für } i \in I \\ \text{metrischer Raum}\end{array} \arrow[r, squiggly, "\text{von Metrik}", "\text{ind. Topologie}"'] \arrow[d, squiggly, "\text{Produkt bilden}"'] & \begin{array}{c}(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \text{ für } i \in I \\ \text{topologischer Raum}\end{array} \arrow[d, squiggly, "\text{Produkt bilden}"] \\
\begin{array}{c}(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} d_i) \\ \text{metrischer Raum}\end{array} \arrow[r, squiggly, "\text{von Metrik}", "\text{ind. Topologie}"'] & \begin{array}{c}(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{O}_{\prod_{i\in I} X_i}) \\ \text{topologischer Raum}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Wir bemerken, dass diese Konstruktion insbesondere das Produkt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ als Spezialfall enthält, wobei natürlich statt obiger Metrik die äquivalente Metrik

$$\widetilde{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

gewählt wird, wenn auf die euklidische Struktur wert gelegt wird.
Ist I abzählbar, so definieren wir auf dem abzählbar-unendlichen kartesischen Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ folgende Metrik:

$$d_I\big((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\big) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^{i+1}(1 + d_i(x_i, y_i))}.$$

Wir haben somit auch eine Topologie $\mathcal{O}_I$ auf $\Pi_{i\in I} X_i$, die von der Metrik d_I induziert ist. Im nächsten Abschnitt werden wir eine Produkttopologie $\mathcal{O}$ auf $\prod_{i\in I} X_i$ für beliebige Indexmengen I und beliebige topologische Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ definieren. Diese Produkttopologie $\mathcal{O}$ hat die Eigenschaft, dass sie mit der von der Metrik d auf $\prod_{i\in I} X_i$ induzierten Topologie $\mathcal{O}_I$ übereinstimmt, so lange die Menge I endlich oder abzählbar ist und die induzierten Topologien zu (X_i, d_i) betrachtet werden. Es gilt sogar, dass das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ (versehen mit der zu definierenden Produkttopologie) metrisierbarer Räume X_i genau dann metrisierbar ist, wenn I endlich oder abzählbar ist, [2, Korollar 10.18]. In Kapitel 10 *von [2] finden sich weitere sogenannte Metrisationssätze, die Kriterien an die Hand geben, wann ein topologischer Raum metrisierbar ist.*

I.4.8 Lemma: *Für topologische Räume* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *ist*

$$\mathcal{S} := \{O \times Y \mid O \in \mathcal{O}_X\} \cup \{X \times O \mid O \in \mathcal{O}_Y\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie $\mathcal{O}_{X \times Y}$ *auf* $X \times Y$.

I.4.9 Lemma: *Für topologische Räume* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *seien*

$$\begin{aligned} p_1 \colon X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} p_2 \colon X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

die kanonischen Projektionen. Dann ist die Produkttopologie $\mathcal{O}_{X \times Y}$ *auf* $X \times Y$ *die gröbste Topologie, so dass* p_1 *und* p_2 *stetig sind. Weiterhin sind die kanonischen Projektionen offen.*

I.4.10 Satz: *Für topologische Räume* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *ist die Produkttopologie* $\mathcal{O}_{X \times Y}$ *die feinste Topologie auf* $X \times Y$*, so dass für alle topologischen Räume* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *und alle stetigen Abbildungen* $f \colon Z \longrightarrow X$ *und* $g \colon Z \longrightarrow Y$ *die Abbildung* $(f, g) \colon Z \longrightarrow X \times Y$ *mit* $(f, g)(z) = (f(z), g(z))$ *stetig ist.*

Beweis: Wir zeigen, dass die Produkttopologie diese Eigenschaft besitzt und die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft ist.

1. $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ hat diese Eigenschaft:
   Nach Satz I.2.3 genügt es, Urbilder einer Subbasis von $X \times Y$ zu betrachten. Nach Lemma I.4.8 können wir $O \times Y$ mit $O \in \mathcal{O}_X$ oder $X \times O$ mit $O \in \mathcal{O}_Y$ wählen. O.B.d.A. betrachten wir $O \times Y$ mit $O \in \mathcal{O}_X$. Nun ist
   $$(f, g)^{-1}[O \times Y] = f^{-1}[O]$$
   offen, da f stetig ist.
2. Sei $\mathcal{O}$ eine von $\mathcal{O}_{X \times Y}$ verschiedene Topologie auf $X \times Y$, so dass die Abbildung (f, g) stetig ist. Betrachte die Identitätsabbildung
   $$\begin{aligned} \mathrm{Id} : (X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y}) &\longrightarrow (X \times Y, \mathcal{O}) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$
   Nach Lemma I.4.9 sind die Abbildungen $p_1 : (X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ und $p_2 : (X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y}) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig. Da $\mathrm{Id} = (p_1, p_2)$ gilt, ist Id stetig. Nach Lemma I.2.5 ist die Topologie $\mathcal{O}_{X \times Y}$ somit feiner als $\mathcal{O}$.

□

I.4.11 Korollar: *Für beliebige topologische Räume* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *ist die Produkttopologie* $\mathcal{O}_{X \times Y}$ *die einzige Topologie auf* $X \times Y$*, so dass gilt:*

(a) Die kanonischen Projektionen auf die Faktoren X *und* Y *sind stetig.*

(b) Für einen beliebigen topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *und beliebige stetige Abbildungen* $f : Z \longrightarrow X$ *und* $g : Z \longrightarrow Y$ *ist die Abbildung* $(f, g) : Z \longrightarrow X \times Y$ *mit* $z \longmapsto (f(z), g(z))$ *stetig.*

I.5. Konstruktion weiterer topologischer Räume: Initialtopologie

I.5.1 Definition: *Seien X und I Mengen. Weiter seien für $i \in I$ topologische Räume $(Y_i, \mathcal{O}_i)$ und Abbildungen $f_i \colon X \longrightarrow Y_i$ gegeben. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X heißt Initialtopologie bzgl. $(f_i)_{i\in I}$, falls für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ und jede Abbildung $g \colon Z \longrightarrow X$ gilt:*

> *Die Abbildung $g \colon Z \longrightarrow X$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $i \in I$ die Abbildung $f_i \circ g \colon Z \longrightarrow Y_i$ stetig ist.*

Wir notieren dies schematisch wie folgt

$$\begin{tikzcd}
(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & (X, \mathcal{T}) \arrow[d, "f_i"] \\
& (Y_i, \mathcal{O}_i)
\end{tikzcd}$$

und sagen, dass obiges Diagramm kommutiert.

I.5.2 Beispiel:

(a) Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$, so ist die Unterraumtopologie auf Y aus Definition I.4.1 eine Initialtopologie bezüglich der Inklusionsabbildung $i \colon Y \longrightarrow X$ (hier ist also $|I| = 1$). Dies ist gerade die Aussage von Lemma I.4.3.

(b) Für topologische Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist die Produkttopologie $\mathcal{O}_{X\times Y}$ von $X\times Y$ aus Definition I.4.6 die Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen $p_1 \colon X\times Y \longrightarrow X$ und $p_2 \colon X\times Y \longrightarrow Y$. Das folgt aus der Aussage von Korollar I.4.11. Eine entsprechende Ausssage gilt natürlich für die iterierte Produkttopologie von $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ wobei I eine endliche Indexmenge ist.

(c) Das reziproke Bild der Topologie $\mathcal{O}_Y$ von Y bezüglich $f \colon X \longrightarrow Y$ ist die gröbste Topologie $\mathcal{O}_X$ auf X, für die f stetig ist. $\mathcal{O}_X$ besteht offenbar genau aus den Urbildern $f^{-1}[O]$ für $O \in \mathcal{O}_Y$. Dies ist ein weiteres Beispiel für eine Initialtopologie wie Satz I.5.3 zeigt.

Der folgende Satz garantiert uns, dass die Abbildungen f_i, die zur Definition der Initialtopologie benötigt werden, aus topologischer Sicht immer stetige Abbildungen sind. Damit folgt aus der Stetigkeit einer Abbildung $g : Z \longrightarrow X$ natürlich sofort die Stetigkeit der Abbildungen $f_i \circ g$ für alle $i \in I$. Der Satz geht aber darüber hinaus, da er uns sagt, dass die Initialtopologie die gröbste Topologie ist, bezüglich der alle f_i stetig sind. Dies ermöglicht uns den Rückschluß auf die Stetigkeit von g aus der Stetigkeit der f_i und der $f_i \circ g$. Denn im Allgemeinen folgt aus der Stetigkeit der $f_i : X \longrightarrow Y_i$ und der $f_i \circ g : Z \longrightarrow Y_i$ nicht die Stetigkeit von $g : Z \longrightarrow X$.

I.5.3 Satz: *Existiert eine Initialtopologie $\mathcal{T}$ auf X bezüglich der Abbildungen $(f_i)_{i\in I}$, so ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie auf X bezüglich der jede Abbildung $f_i \colon X \longrightarrow Y_i$ mit $i \in I$ stetig ist. Insbesondere ist $\mathcal{T}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: Die Stetigkeit von $f_i\colon X \longrightarrow Y_i$ für $i \in I$ ist einfach nachzuweisen. Wähle $(Z, \mathcal{O}_Z) = (X, \mathcal{T})$ und $g = id\colon X \longrightarrow X$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie mit der genannten Eigenschaft ist, nehmen wir an, dass eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X existiert, für die jedes $f_i\colon X \longrightarrow Y_i$ stetig ist. Sei $g\colon (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ die Identität $g(x) = x$. Nach Wahl von $\mathcal{O}$ ist nun $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ stetig, somit ist g stetig, da $\mathcal{T}$ die Initialtopologie bezüglich $(f_i)_{i\in I}$ ist. Damit ist nach Lemma I.2.5 $\mathcal{O}$ feiner als $\mathcal{T}$. □

I.5.4 Satz: *Seien X eine Menge, I eine Indexmenge, $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ topologische Räume und $f_i\colon X \longrightarrow Y_i$ Abbildungen für jedes $i \in I$. Setze*

$$\mathcal{S} := \left\{ f_i^{-1}[O] \;\middle|\; O \subseteq Y_i \text{ offen} \right\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{O}_X := \left\{ M \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ ist beliebige Vereinigung endlicher} \\ \text{Durchschnitte von Elementen aus } \mathcal{S} \end{array} \right\}$$

eine Topologie auf X mit Subbasis $\mathcal{S}$. Insbesondere ist $\mathcal{O}_X$ Initialtopologie von X bezüglich $(f_i)_{i\in I}$.

Beweis: Dass $\mathcal{O}_X$ eine Topologie auf X definiert rechnet man leicht nach: Offensichtlich ist $\bigcup_{k\in K} O_k \in \mathcal{O}_X$, falls K eine Indexmenge und $O_k \in \mathcal{O}_X$ für alle $k \in K$. Ebenso ist $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}_X$ klar, falls $n \in \mathbb{N}$ und $O_i \in \mathcal{O}_X$ für $i \in \{1, ..., n\}$. Der triviale Schnitt $\bigcap_{i\in\varnothing} O_i$ liegt in $\mathcal{O}_X$, da $\bigcap_{i\in\varnothing} O_i = X = f_k^{-1}[Y]$ für beliebiges $k \in I$ gilt.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{O}_X$ die Initialtopologie auf X bezüglich $(f_i)_{i\in I}$ ist.
<u>$\Leftarrow$:</u> Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein topologischer Raum und $g\colon Z \longrightarrow X$ eine Abbildung. Ist g stetig, so folgt die Stetigkeit von $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ aus Bemerkung I.2.2, da nach Definition von $\mathcal{O}_X$ die Abbildung f_i für jedes $i \in I$ stetig ist.

<u>$\Rightarrow$:</u> Sei nun $f_i \circ g$ für jedes $i \in I$ stetig. Dann existiert für $S \in \mathcal{S}$ ein $i_0 \in I$ und $O \in \mathcal{O}_{i_0}$ mit $S = f_i^{-1}[O]$. Nun folgt aus der Stetigkeit von $f_{i_0} \circ g$:

$$g^{-1}[S] = g^{-1}[f_{i_0}^{-1}[O]] = (f_{i_0} \circ g)^{-1}[O] \in \mathcal{O}_Z.$$

Nach Satz I.2.3 ist dann g stetig. □

I.5.5 Definition:

(a) *Für beliebige Mengen I und M_i, $i \in I$, ist das kartesische Produkt*

$$\prod_{i\in I} M_i := \left\{ x\colon I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \;\middle|\; x(i) \in M_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Hierbei bezeichnet $\bigcup_{i\in I} M_i$ die Vereinigung der Mengen. Ein Element von $\prod_{i\in I} M_i$ schreiben wir oft als $(x_i)_{i\in I}$. Ist $A_i \subseteq M_i$, so schreiben wir auch $\prod_{i\in I} A_i$ für $\left\{ (x_i) \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; x(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \right\}$. Gilt $M_i = M$ für alle $i \in I$, so ist es weit verbreitet M^I statt $\prod_{i\in I} M$ zu schreiben.

(b) *Für das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ definieren wir zu jedem $i \in I$ eine* *kanonische Projektion*

$$p_i\colon \prod_{k\in I} X_k \longrightarrow X_i$$
$$(x_k)_{k\in I} \longmapsto x_i$$

(c) *Das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ topologischer Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ versehen mit der Initialtopologie $\mathcal{T}$ bezüglich der kanonischen Projektionen wird Produktraum der $(X_i, \mathcal{O}_i)$ genannt. Die Topologie $\mathcal{T}$ wird auch Produkttopologie genannt. Wir schreiben für den Produktraum $\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{O}_i)$ verkürzend $\prod_{i\in I} X_i$. Ist $I = \{1, 2, ..., n\}$ eine endliche Indexmenge, so schreiben wir wie in I.4.6 auch $X_1 \times ... \times X_n$ statt $\prod_{i\in I} X_i$.*

I.5.6 Lemma: *Seien I eine beliebige Indexmenge und $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ topologische Räume. Dann ist*

$$\mathcal{S} := \left\{ \prod_{i\in I} O_i \;\middle|\; \begin{array}{c} O_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und es existiert} \\ \text{ein } k \in I, \text{ so dass } O_\ell = X_\ell \text{ für } \ell \in I \setminus \{k\} \end{array} \right\}$$

eine Subbasis und

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i\in I} O_i \;\middle|\; \begin{array}{c} O_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und} \\ O_k = X_k \text{ für fast alle } k \in I \end{array} \right\}$$

eine Basis der Produkttopologie von $\prod_{i\in I} X_i$.

Beweis: Ist $p_k\colon \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_k$ die kanonische Projektion auf den k-ten Faktor und $O \in \mathcal{O}_k$, so ist

$$p_k^{-1}[O] = \prod_{i\in I} O_i \quad \text{mit} \quad O_i = \begin{cases} O, & i = k, \\ X_j, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Mengensystem ist gerade $\mathcal{S}$ und bildet nach Satz I.5.4 eine Subbasis der Initialtopologie. Jedes Element von $\mathcal{B}$ lässt sich als endlicher Durchschnitt von Elementen aus $\mathcal{S}$ schreiben und jeder endliche Schnitt von Elementen aus $\mathcal{S}$ ist offensichtlich in $\mathcal{B}$. □

I.5.7 Bemerkung:

(a) *Die Elemente der in Lemma I.5.6 beschriebenen Basis $\mathcal{B}$ werden auch Elementarmengen der Produkttopologie genannt.*

(b) *Die kanonische Projektion p_i ist für alle $i \in I$ offen.*

(c) *„fast alle" in der Beschreibung von $\mathcal{B}$ bedeutet „alle bis auf endlich viele".*

(d) *Gilt $O_i \neq X_i$ und $O_i \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$, so ist $\prod_{i\in I} O_i$ keine offene Menge in der Produkttopologie von $\prod_{i\in I} X_i$.*

(e) *Auf dem kartesischen Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$ können wir selbstverständlich das Mengensystem*

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \left\{ \prod_{i\in I} O_i \;\middle|\; O_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}$$

betrachten. Es gibt genau eine Topologie $\mathcal{O}$, die das Mengensystem $\widetilde{\mathcal{B}}$ als Basis besitzt, diese Topologie wird auch Boxtopologie der X_i genannt. Of-

fentsichtlich sind Produkttopologie und Boxtopologie im Allgemeinen verschieden.

I.5.8 Satz: *Sei I eine Indexmenge. Weiter seien für alle $i \in I$ topologische Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ und $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ mit $X_i \neq \varnothing$ und Abbildungen $f_i \colon X_i \longrightarrow Y_i$ gegeben. Die Abbildung*

$$f \colon \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i \in I} Y_i$$

mit $(x_k)_{i\in I} \longmapsto (f_i(x_i))_{i\in I}$ ist genau dann stetig, wenn alle f_i stetig sind.

Beweis: Bezeichnen wir für $i \in I$ die kanonischen Projektionen mit

$$p_i \colon \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i \quad \text{und} \quad q_i \colon \prod_{i\in I} Y_i \longrightarrow Y_i,$$

so erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I}(X_i, \mathcal{O}_i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_k"'] \arrow[dr, "q_k \circ f", "f_i \circ p_k"'] & \prod_{i\in I}(Y_i, \mathcal{T}_i) \arrow[d, "q_k"] \\
(X_k, \mathcal{O}_k) \arrow[r, "f_k"'] & (Y_k, \mathcal{T}_k)
\end{tikzcd}$$

<u>$\Rightarrow$:</u> Ist f stetig, so ist auch $q_k \circ f$ stetig, da die kanonischen Projektionen stetig sind. Wegen $f_k \circ p_k = q_k \circ f$ ist somit für $O \in \mathcal{T}_k$ auch $p_k\left[(q_k \circ f)^{-1}[O]\right] \in \mathcal{O}_k$, da p_k offen ist. Damit ist f_k stetig.
<u>$\Leftarrow$:</u> Ist f_i für alle $i \in I$ stetig, so ist auch $f_k \circ p_k$ für alle $k \in I$ stetig. Aus $q_k \circ f = f_k \circ p_k$ und der Definition der Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} Y_i$ folgt nun, dass f stetig ist. $\square$

I.6. Erste Eigenschaften: Zusammenhangsbegriffe

I.6.1 Definition:
(a) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt zusammenhängend, wenn X und $\varnothing$ die einzigen offen und abgeschlossen Mengen der Topologie $\mathcal{O}_X$ sind.
(b) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ von $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt zusammenhängend, wenn sie bezüglich der induzierten Topologie zusammenhängend ist.

I.6.2 Bemerkung: *Eine äquivalente Charakterisierung zusammenhängender Räume ist offensichtlich die folgende Aussage:*

> *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist zusammenhängend, wenn sich X nicht als disjunkte Vereinigung von zwei offenen und nicht leeren Mengen darstellen lässt.*

In Definition I.6.1 sind die Begriffe offen und abgeschlossen gleichwertig. Die gerade formulierte Charakterisierung ändert sich nicht, falls „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzt wird. An einer Zerlegung $X = A \sqcup B$ des nicht zusammenhängenden Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ in nicht leere, offene und disjunkte Mengen A und B sehen wir, dass die Topologie $\mathcal{O}_X$ vollständig durch die Spurtopologien auf A und B bestimmt wird. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ ist genau dann offen, falls $O \cap A$ in A und $O \cap B$ in B offen sind. Aussagen über die Topologie von X lassen sich also aus den Spurtopologien von A und B rekonstruieren. Man betrachtet deshalb oft A und B einzeln oder macht Aussagen über zusammenhängende Räume, wenn man aus diesen die Aussagen für nicht zusammenhängende rekonstruieren kann.

I.6.3 Beispiele:
(a) $(X, \{\varnothing, X\})$ ist zusammenhängend.
(b) $(X, \mathcal{O}_{dis})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X nur aus einem Punkt besteht.
(c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Spurtopologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ ist nicht zusammenhängend, denn $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$ ist eine disjunkte Zerlegung in nicht leere, offene Mengen.
(d) Offene Intervalle $I =]a; b[\subset (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ sind zusammenhängend.
Beweis (durch Widerspruch): Angenommen $I =]a; b[$ wäre nicht zusammenhängend. Dann existieren disjunkte Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_{nat}$ mit

$$O_1 \cap I = U \neq \varnothing, \qquad O_2 \cap I = V \neq \varnothing \quad \text{und} \quad I = U \cup V.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $u \in U$ und $v \in V$ mit $u < v$ annehmen. Setzen wir $S := \{s \in I \mid [u; s] \subset U\}$ und $s_0 := \sup S$, so gilt entweder $s_0 \in U$ oder $s_0 \in V$. Wir unterscheiden nun diese Fälle.
$\underline{s_0 \in U}$: Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $[s_0 - \varepsilon; s_0 + \varepsilon] \subset U$, dies widerspricht der Supremumseigenschaft von s_0.
$\underline{(s_0 \in V)}$: Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $[s_0 - \varepsilon; s_0 + \varepsilon] \subset V$, dies widerspricht der Supremumseigenschaft von s_0.

I.6.4 Proposition: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Ist $A \subset X$ zusammenhängend, dann ist jedes $B \subset X$ mit $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ zusammenhängend.*

Beweis: Angenommen ein solches B wäre nicht zusammenhängend. Dann gäbe es in X offene Mengen O_1 und O_2 mit

$$(B \cap O_1) \cup (B \cap O_2) = B, \quad B \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing \quad \text{und } B \cap O_i \neq \varnothing$$

für $i \in \{1, 2\}$. Dann folgt

$$(A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) = A \quad \text{und} \quad A \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing.$$

Für $b_1 \in B \cap O_1$ und $b_2 \in B \cap O_2$ gilt nach Voraussetzung $b_1, b_2 \in \overline{A}$. Folglich gilt für alle $O \in \mathcal{O}_X$ mit $b_i \in O$ auch $O \cap A \neq \varnothing$, $i \in \{1; 2\}$. Insbesondere gilt $O_i \cap A \neq \varnothing$ und es folgt, dass A nicht zusammenhängend ist. ↯ □

I.6.5 Korollar: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Ist $A \subseteq X$ dicht und zusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

I.6.6 Satz: *Ist X zusammenhängend und $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig, dann ist $f[X]$ zusammenhängend.*

Beweis: Angenommen $f[X]$ wäre nicht zusammenhängend. Dann gäbe es in $\mathcal{O}_Y$ offene Mengen O_1 und O_2 mit

$$O_1 \cap O_2 \supset f[X], \quad O_i \cap f[X] \neq \varnothing \quad \text{und} \quad O_1 \cap O_2 \cap f[X] = \varnothing.$$

Dann sind $f^{-1}[O_1]$ und $f^{-1}[O_2]$ nicht leer, disjunkt und offen in X. Weiter gilt $f^{-1}[O_1] \cup f^{-1}[O_2] = X$. ↯ □

I.6.7 Satz (verallgemeinerter Zwischenwertsatz)**:**
Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ zusammenhängend und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie $\mathcal{O}_{nat}$ versehen sei. Für beliebige $a, c \in f[X]$ mit $a < c$ und jedes b mit $a < b < c$ gilt dann $b \in f[X]$.

Beweis: Nach Beispiel I.6.3 und Proposition I.6.4 sind alle offenen, halboffenen und abgeschlossenen Intervalle von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ zusammenhängend. Weiterhin gilt, dass dies alle zusammenhängenden Teilmengen von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ sind, die mindestens zwei Punkte enthalten (siehe Übungsaufgaben). Die Behauptung folgt nun mit Satz I.6.6. □

I.6.8 Satz: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ist jedes $M \in \mathcal{M}$ zusammenhängend, gilt $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M = X$ und sind die Elemente von $\mathcal{M}$ paarweise nicht disjunkt, so ist X zusammenhängend.*

Beweis: Sei $A \subseteq X$ offen und abgeschlossen. Dann ist $A \cap M$ in M offen und abgeschlossen für alle $M \in \mathcal{M}$. Angenommen $A \neq \varnothing$. Dann gibt es ein $M \in \mathcal{M}$ mit $A \cap M \neq \varnothing$ und da M zusammenhängend ist, folgt $A \cap M = M$. Nun gilt für beliebiges $M' \in \mathcal{M}$ sowohl $M' \cap M = \varnothing$ als auch $M' \cap M \subset M' \cap A$. Damit gilt aber wie eben $M' \cap A = M'$. Insgesamt folgt somit $A = X$. □

I.6.9 Korollar: *Seien M_i zusammenhängende Teilmengen des topologischen Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ für alle $i \in I$, so dass $\bigcap_{i\in I} M_i \neq \varnothing$. Dann ist auch $\bigcup_{i\in I} M_i$ zusammenhängend.*

Wir wollen nun zeigen, dass der Produktraum zusammenhängender Räume wieder zusammenhängend ist.

I.6.10 Satz: *Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ der Produktraum der topologischen Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)$ für ein Indexmenge I. Dann ist X genau dann zusammenhängend, wenn X_i für jedes $i \in I$ zusammenhängend ist.*

Beweis:
$\underline{\Rightarrow}$: Ist X zusammenhängend, so folgt für jedes $i \in I$ aus der Stetigkeit der kanonischen Projektion $p_i \colon X \longrightarrow X_i$ mit Hilfe von Satz I.6.6, dass X_i zusammenhängend ist.
$\underline{\Leftarrow}$: Seien nun alle X_i zusammenhängend und $a = (a_i)_{i\in I} \in X$. Setze

$$Z := \left\{ z = (z_i)_{i\in I} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es gibt eine zusammenhängende} \\ \text{Menge in } X\text{, die } a \text{ und } z \text{ enthält} \end{array} \right\}.$$

Ist Z zusammenhängend und liegt Z dicht in X, so folgt die Behauptung aus Korollar I.6.5. Betrachte dazu eine Elementarmenge U des Produktraums X, mit anderen Worten

$$U = \bigcap\nolimits_{k\in K} p_k^{-1}(U_k)$$

für eine endliche Teilmenge $K \subseteq I$ und geeignete $U_k \in \mathcal{O}_k$. Seien nun $b_k \in U_k$ für alle $k \in K$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $K = \{1, 2, ..., n\}$ annehmen. Nun setze

$$E_1 := \left\{ (x_i) \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 \in X_1 \text{ und} \\ x_i = a_i \text{ für } i \in I \setminus \{1\} \end{array} \right\}$$

$$E_2 := \left\{ (x_i) \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 = b_1,\ x_2 \in X_2 \text{ und} \\ x_i = a_i \text{ für } i \in I \setminus \{1, 2\} \end{array} \right\}$$

$$\vdots$$

$$E_n := \left\{ (x_i) \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} x_i = b_i \text{ für } 1 \leq i < n \\ x_n \in X_n \text{ und} \\ x_i = a_i \text{ für } i \in I \setminus K \end{array} \right\}$$

Nun ist E_i zusammenhängend, da für jedes $i \in K$ die Räume E_i und X_i homöomorph sind. Weiterhin gilt $E_i \cap E_{i+1} \neq \varnothing$. Somit folgt aus Korollar I.6.9, dass $E := \bigcup_{k\in K} E_k$ zusammenhängend ist.
Da $a \in E$ gilt, folgt $E \subseteq Z$. Nun gilt $E \cap U \neq \varnothing$ und somit auch $Z \cap U \neq \varnothing$. Also hat Z nicht leeren Durchschnitt mit jeder Elementarmenge U von X, aber das heißt gerade, dass $\overline{E} = X$ und X nach Proposition I.6.4 zusammenhängend ist. $\square$

I.6.11 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt*

$$K_x := \left\{ \tilde{x} \in X \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es existiert eine zusamenhängende} \\ \text{Menge } M \subseteq X \text{ mit } x, \tilde{x} \in X \end{array} \right\}$$

Zusammenhangskomponente von x.

I.6.12 Satz: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Dann gilt:*

(a) Zu jeder zusammenhängende Menge $M \subseteq X$ gibt es eine Zusammenhangskomponente Z mit $M \subseteq Z$.

(b) Jede Zusammenhangskomponente ist nicht leer.

(c) X ist disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten:

$$X = \bigcup_{x \in X} K_x \qquad \text{und} \qquad \text{entweder gilt } K_x = K_y \text{ oder } K_x \cap K_y = \varnothing.$$

(d) K_x ist zusammenhängend und abgeschlossen.

(e) Für alle offenen und abgeschlossenen $M \subseteq X$ und $x \in M$ gilt: $K_x \subseteq M$.

(f) $K_x \subseteq \bigcap_{\substack{M \subseteq X \\ M \text{ offen\&abg.}}} M$.

Beweis:

(a) – (c) Man rechnet nach, dass

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \text{Es gibt eine zusammenhängende Menge } M \text{ mit } x, y \in M.$$

eine Äquivalenzrelation ist. Die Aussagen folgen aus der Tatsache, dass die Zusammenhangskomponenten genau die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation sind.

(d) K_x ist zusammenhängend:
Der Zusammenhang von K_x folgt mit Korollar I.6.9 aus

$$K_x = \bigcup_{\substack{M \subseteq X \\ M \text{ zsh.}}} M.$$

K_x ist abgeschlossen:
Da nach Proposition I.6.4 mit K_x auch $\overline{K_x}$ zusammenhängend ist, folgt sofort $K_x = \overline{K_x}$.

(e) Angenommen, dass $x \in M$, M offen und abgeschlossen in $(X, \mathcal{O}_X)$ und $M \subset K_x$ gilt. Dann sind entweder M und $K_x \setminus M$ offen und abgeschlossen oder M ist leer. Somit ist K_x nicht zusammenhängend. $\lightning$

(f) Die Behauptung folgt aus (e).

$\square$

I.6.13 Beispiele:

(a) Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $]-\infty; 0[$ und $]0; \infty[$.

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ betrachte die Strecken

$$s_i := \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{i} \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Mit deren Hilfe definieren wir den Unterraum

$$X := \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} s_i$$

von $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{nat})$. Die Strecken s_i sind offen und abgeschlossen in X und damit zusammenhängend. Weiterhin gilt

$$K_{\binom{0}{0}} = \{\binom{0}{0}\} \quad \text{und} \quad K_{\binom{0}{1}} = \{\binom{0}{1}\}.$$

Allerdings ist weder $K_{\binom{0}{0}}$ *noch* $K_{\binom{0}{1}}$ *offen in* X.

Sei nun $M \subseteq X$ *offen und abgeschlossen mit* $\binom{0}{0} \in M$. *Dann schneidet* M *fast alle Strecken* s_i, *da* M *offen ist. Nach Satz I.6.12(e) enthält* M *alle diese Strecken* s_i. *Der Punkt* $\binom{0}{1}$ *ist damit Berührpunkt von* M *in* X *und folglich gilt* $\binom{0}{1} \in M$. *Damit ist*

$$K_{\binom{0}{0}} \neq \bigcap_{\substack{M \subseteq X \\ M \text{ offen \& abg.}}} M$$

gezeigt.

I.6.14 Definition: *Seien* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein topologischer Raum und* $I = [0;1]$ *der Unterraum von* $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$.

(a) *Eine stetige Abbildung* $f\colon I \longrightarrow X$ *heißt Weg in* X. *Der Anfangspunkt von* f *ist* $f(0)$ *und der Endpunkt von* f *ist* $f(1)$. *Ein Weg heißt geschlossen (oder auch Schlaufe oder Schleife), falls Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. Ist* f *ein Weg mit Anfangspunkt* x *und Endpunkt* y, *so sprechen wir auch von einem „Weg von* x *nach* y".

(b) *Der Raum* X *heißt wegzusammenhängend, falls für alle* $x, y \in X$ *ein Weg* f *mit Anfangspunkt* x *und Endpunkt* y *existiert.*

(c) *Die Menge*

$$K_x^w = \{\tilde{x} \in X \mid \text{Es existiert ein Weg von } x \text{ nach } \tilde{x}\}$$

heißt Wegzusammenhangskomponente von x.

I.6.15 Satz: *Jeder wegzusammenhängende topologische Raum* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ist auch zusammenhängend.*

Beweis: Seien $x, y \in X$ beliebig. Dann gibt es einen Weg $\omega\colon I \longrightarrow X$ von x nach y. Da nach Beispiel I.6.3(d) und Proposition I.6.4 der Raum I zusammenhängend ist, ist nach Satz I.6.6 auch $\omega[I]$ zusammenhängend. Somit ist $y \in K_x$ gezeigt und X besteht aus einer Wegzusammenhangskomponente. $\square$

I.6.16 Beispiele:

(a) $(X, \mathcal{O}_{ind})$ *ist stets wegzusammenhängend.*

(b) *Übungsaufgaben*

I.6.17 Definition: *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein topologischer Raum.*

(a) *Der Raum* X *ist lokal zusammenhängend, wenn es zu jedem Punkt* $x \in X$ *und jeder Umgebung* U *von* x *eine zusammenhängende Umgebung* V *von* x *mit* $V \subseteq U$ *gibt.*

(b) *Der Raum* X *ist lokal wegzusammenhängend, wenn zu jedem Punkt* $x \in X$ *und jeder Umgebung* U *von* x *eine wegzusammenhängende Umgebung* V *von* x *mit* $V \subseteq U$ *gibt.*

I.6.18 Beispiele:

(a) $\mathbb{R}$ *ist lokal zusammenhängend,* $\mathbb{Q}$ *ist nicht lokal zusammenhängend.*

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$S_n := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \leq x \leq t \text{ und} \\ nx + y = 1 \end{array} \right\}$$

und betrachte

$$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \,\cup\, \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Dann ist X wegzusammenhängend aber nicht lokal zusammenhängend, da jede Umgebung von $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ fast alle S_n trifft. Weiterhin ist $X \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ nicht zusammenhängend, aber $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ ist lokal (weg-)zusammenhängend!

I.6.19 Satz: *Die Wegzusammenhangskomponenten eines lokal wegzusammenhängenden topologischer Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ sind offen und abgeschlossen und entsprechen genau den Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: Sei K_x^w die Wegzusammenhangskomponente von $x \in X$. Dann existieren für jedes $y \in K_x^w$ ein Weg von x nach y und eine wegzusammenhängende Umgebung U_y von y. Insbesondere gibt es eine offene Menge O_y mit $O_y \subseteq U_y$ und $y \in O_y$. Damit gilt auch $O_y \subseteq K_x^w$, da es für jeden Punkt $z \in O_y$ einen Weg (in U_y aber nicht unbedingt in O_y!) von y nach z gibt und dieser mit einem Weg von x nach y zu einem Weg von x nach z kombiniert werden kann. Mit diesen O_y gilt dann aber

$$\bigcup_{y\in K_x^w} O_y = K_x^w.$$

Damit ist K_x^w als offen nachgewiesen.
Definiere nun eine Relation $\sim_w$ auf X:

$$x \sim_w y \quad\Longleftrightarrow\quad \text{Es existiert ein Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } X.$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass $\sim_w$ auf X eine Äquivalenzrelation auf X ist und die Äquivalenzklassen genau die Wegzusammenhangskomponenten von X sind. Nun ist $X \setminus K_x^w = \bigcup_{y\in X\setminus K_x^w} K_y^w$ als Vereinigung offener Mengen offen. Damit ist gezeigt, dass K_x^w abgeschlossen ist.
Nach Satz I.6.19 sind die Wegzusammenhangskomponenten zusammenhängend. Da die Wegzusammenhangskomponenten als Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_w$ paarweise disjunkt sind, folgt, dass jede Zusammenhangskomponente eine dijunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten ist. Da eine Zusammenhangskomponente Z zusammenhängend ist und die Wegzusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen in X und Z sind (Z ist abgeschlossen in X!) sind, kann Z nur die disjunkte Vereinigung einer Wegzusammenhangskomponente sein. $\square$

I.6.20 Korollar: *Jeder zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende topologische Raum ist wegzusammenhängend.*

I.7. Weitere Eigenschaften: hausdorffsch & kompakt

Eine Eigenschaft, die für metrische Räume selbstverständlich ist und die wir oft wie selbstverständlich benutzen wollen, gilt in topologischen Räumen nicht immer:

I.7.1 Definition: *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein Hausdorff-Raum, hausdorffsch oder auch T_2-Raum, wenn für je zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ stets offene Mengen O_1 und O_2 existieren, die $x_i \in O_i$, $i \in \{1,2\}$, und $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ erfüllen.*

I.7.2 Bemerkung:

(a) *Das T in T_2 steht für Trennungseigenschaft oder Trennungsaxiom, die 2 deutet an, dass wir noch weitere Trennungseigenschaften/ -axiome sehen werden...*

(b) *Metrisierbare topologische Räume X sind stets hausdorffsch. Für x, $y \in X$ mit $x \neq y$ gilt $d(x,y) > 0$. Sei nun $D := d(x,y)$ und betrachte die offenen Bälle um x und y mit Radius $\frac{D}{3}$. Für diese gilt:*

$$\mathring{B}_{\frac{D}{3}}(x) \cap \mathring{B}_{\frac{D}{3}}(y) = \varnothing.$$

(c) *Jeder indiskrete Raum $(X, \mathcal{O}_{ind})$, der mindestens zwei Elemente enthält, ist nicht hausdorffsch.*

I.7.3 Satz: *Das Produkt $X \times Y$ der T_2-Räume X und Y ist ein T_2-Raum.*

Beweis: Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ hausdorffsch und $(x,y), (x',y') \in X \times Y$ verschieden. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \neq x'$. Folglich gibt es offene Mengen $O \in \mathcal{O}_X$ und $O' \in \mathcal{O}_X$ mit $x \in O$, $x' \in O'$ und $O \cap O' = \varnothing$. Nun sind aber auch $O \times Y$ und $O' \times Y$ disjunkt, wobei die erste Menge eine offene Umgebungen von (x,y) und die zweite Menge eine offene Umgebung von (x',y') in $X \times Y$ ist. $\square$

I.7.4 Satz: *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ sind äquivalent:*

(a) *X ist hausdorffsch.*

(b) *Die Diagonale $\Delta_X = \{\ (x,x)\ \mid x \in X\}$ ist in $X \times X$ abgeschlossen.*

Beweis: Ein topologischer Raum X ist genau dann ein T_2-Raum, wenn für alle Punkte $(x_1, x_2) \in X \times X \setminus \Delta$ Umgebungen $U_1 \in \mathcal{U}(x_1)$ und $U_2 \in \mathcal{U}(x_2)$ mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ existieren.
Gilt dies, so existiert auch eine offene Umgebung $U_1 \times U_2$ von (x_1, x_2) mit $U_1 \times U_2 \cap \Delta = \varnothing$. Es folgen $(x_1, x_2) \notin \overline{\Delta}$ und $\Delta = \overline{\Delta}$, also ist Δ abgeschlossen.

Sei nun Δ abgeschlossen. Für $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $(x_1, x_2) \notin \Delta$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \times V$ von (x_1, x_2) mit $U \times V \cap \Delta = \varnothing$. Die Umgebungen U von x_1 und V von x_2 sind folglich offen und disjunkt. Somit ist X hausdorffsch. $\square$

I.7.5 Definition: *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

(a) Das Mengensystem $\mathcal{M}$ heißt Überdeckung von X, falls $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M = X$. Es ist eine offene Überdeckung von X, falls $\mathcal{M}$ eine Überdeckung von X ist und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}_X$.

(b) Das Mengensystem $\mathcal{M}'$ ist eine Teilüberdeckung der Überdeckung $\mathcal{M}$ von X, falls $\mathcal{M}'$ eine Überdeckung von X ist und $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$.

I.7.6 Definition: *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum.*

(a) Der Raum X heißt quasikompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(b) Der Raum X heißt kompakt, falls X quasikompakt und hausdorffsch ist.

(c) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt quasikompakt bzw. kompakt, falls der Unterraum A quasikompakt bzw. kompakt ist.

(d) Ein Unterraum $A \subseteq X$ heißt relativ kompakt, falls $\overline{A}$ kompakt ist.

I.7.7 Bemerkung: *Der Kompaktheitsbegriff wird in der Literatur nicht einheitlich definiert. Einige Autoren nennen Räume kompakt, die in unserer Begriffsbildung lediglich quasikompakt sind. Genaues Lesen ist also angebracht!*

I.7.8 Beispiel: *Jeder topologische Raum mit nur endlich vielen offenen Mengen ist quasikompakt.*

I.7.9 Satz: *Jeder abgeschlossene Unterraum A des quasikompakten Raumes X ist quasikompakt.*

Beweis: Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine offene Überdeckung von A. Betrachte nun

$$\mathcal{M}' := \{U \in \mathcal{O}_X \mid U \cap A \in \mathcal{M}\}.$$

Nach Definition der Unterraumtopologie gibt es zu jedem $V \in \mathcal{M}$ ein $U \in \mathcal{M}'$ mit $U \cap A = V$. Damit ist $\mathcal{M}' \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von X, zu der eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{M}''$ existiert. Dann ist $\{U \cap A \mid U \in \mathcal{M}''\} \subseteq \mathcal{M}$ eine endliche Teilüberdeckung von A. □

I.7.10 Satz: *Seien X ein Hausdorff-Raum und $K \subseteq X$ quasikompakt. Dann existiert zu jedem $x \in X \setminus K$ eine offene Umgebung U von K und eine offene Umgebung V von x mit $U \cap V = \varnothing$.*

Beweis: Da X hausdorffsch ist, existieren zu $x \in X \setminus K$ und $y \in K$ offene Umgebungen U_y von x und V_y von y mit $U_y \cap V_y = \varnothing$. Zu fest gewähltem $x \in X \setminus K$ und allen $y \in K$ wählen wir nun derartige U_y und V_y.
Nun bildet $\{V_y \cap K\}_{y \in K}$ eine offene Überdeckung von K und da K quasikompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $K' \subseteq K$, so dass $\{V_y \cap K\}_{y \in K'}$ eine endliche Teilüberdeckung ist. Es gilt $K \subseteq \bigcup_{y \in K'} V_y$ und $V := \bigcup_{y \in K'} V_y$ ist eine offene Umgebung von K.
Weiterhin ist $U := \bigcap_{y \in K'} U_y$ eine offene Umgebung von x. Nach Konstruktion gilt offensichtlich $U \cap V = \varnothing$. □

I.7.11 Korollar: *Jede quasikompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.*

I.7.12 Korollar: *Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.*

I.7.13 Satz: *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige und surjektive Abbildung von einem quasikompakten Raum X in einen beliebigen topologischen Raum Y. Dann ist auch Y quasikompakt.*

Beweis: Sei $\mathcal{M}_Y$ eine offene Überdeckung von Y. Es ist zu zeigen, dass eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{M}'_Y$ von $\mathcal{M}_Y$ existiert.
Betrachte $\left\{f^{-1}[U] \;\middle|\; U \in \mathcal{M}_Y\right\}$. Dies ist eine offene Überdeckung von X, da f eine stetige Abbildung ist. Da X quasikompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{M}'_Y$ von $\mathcal{M}_Y$, so dass $\left\{f^{-1}[U] \;\middle|\; U \in \mathcal{M}'_Y\right\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\left\{f^{-1}[U] \;\middle|\; U \in \mathcal{M}_Y\right\}$ ist.
Da f surjektiv ist, folgt wiederum, dass $\mathcal{M}'_Y$ eine Überdeckung von Y ist, denn zu jedem $y \in Y$ existiert $x \in X$ mir $f(x) = y$ und folglich existiert ein $U \in \mathcal{M}'_Y$ mit $x \in f^{-1}[U]$, d.h. $y = f(x) \in U$. $\square$

I.7.14 Satz: *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige und surjektive Abbildung von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorff-Raum. Weiter sei $g\colon Y \longrightarrow Z$ eine Abbildung in einen topologischen Raum Z. Dann ist g stetig, falls $g\circ f\colon X \longrightarrow Z$ stetig ist.*

Beweis: Sei $g \circ f$ stetig und $A \subseteq Z$ abgeschlossen. Dann ist zu zeigen, dass $g^{-1}[A]$ abgeschlossen in Y ist.

Aus der Stetigkeit von $g \circ f$ folgt, dass

$$M := f^{-1}\left[g^{-1}[A]\right] = (g \circ f)^{-1}[A]$$

abgeschlossen ist. Nach Satz I.7.9 ist M quasikompakt und somit ist $f[M]$ nach Satz I.7.13 quasikompakt. Nach Korollar I.7.12 ist $f[M]$ dann abgeschlossen. Da f nach Voraussetzung surjektiv ist, ist $f[M] = g^{-1}[A]$. $\square$

I.7.15 Korollar: *Ist $h\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige und bijektive Abbildung von einem quasikompakten Raum X in einen Hausdorff-Raum Y, dann ist h ein Homöomorphismus.*

Beweis: Es ist bleibt nur die Stetigkeit von h^{-1} zu zeigen. Diese folgt aber mit Satz I.7.14 sofort aus der Stetigkeit von $h^{-1} \circ h = Id_X$, wenn wir $f = h$ und $g = h^{-1}$ setzen. $\square$

I.7.16 Bemerkung: *Die Aussage, sowie die Anordnung der Räume und Abbildungen aus obigem Satz erinnert stark an die Definition der Initialtopologie.*

I.8. Ein Beispiel für Vieles: Cantorsches Diskontinuum

Das Cantorsche Diskontinuum wird rekursiv aus dem Einheitsintervall $I = [0;1]$ konstruiert, wobei im k-ten Rekursionsschritt eine Menge R_k von 2^k abgeschlossenen Intervallen vorliegt. Der Rekursionsschritt besteht darin, jedes vorliegende Intervall in drei gleichgroße Teilintervalle zu zerlegen und das mittlere (offene) Teilintervall zu entfernen. Praktisch bedeutet dies für die ersten $i+1$ Rekursionsschritte $R_0, \cdots, R_i$:

$$\begin{aligned}
R_0 &:= [0;1], \\
R_1 &:= \left[0; \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}; 1\right] \\
&= \textstyle\bigcup_{x \in \{0;2\}^1} R_1^x, \\
R_2 &:= \left(\left[0; \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}; \tfrac{1}{3}\right]\right) \cup \left(\left[\tfrac{2}{3}; \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}; 1\right]\right) \\
&= \textstyle\bigcup_{x \in \{0;2\}^2} R_2^x, \\
&\vdots \\
R_i &:= \textstyle\bigcup_{x \in \{0;2\}^i} R_i^x,
\end{aligned}$$

wobei für $1 \leq k \leq i$ und $x = (x_0, \cdots, x_{k-1}) \in \{0;2\}^k$ die Menge R_k^x das Intervall $\left[\Lambda_k^x; \Lambda_k^x + \frac{1}{3^k}\right]$ mit $\Lambda_k^x = \sum_{0 \leq \ell < k} \frac{x_\ell}{3^{\ell+1}}$ im k-ten Rekursionsschritt bezeichnet.

I.8.1 Definition: *Es bezeichnen $\mathcal{C}$ die Menge $\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} R_i \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{O}_\mathcal{C}$ die Spurtopologie bezüglich der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$. Der topologische Raum $(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C})$ heißt Cantorsches Diskontinuum.*

Jede Zahl $x \in [0;1]$ läßt sich als p-adischen Bruch darstellen, siehe [1, Abschnitt 6.2]. Bezeichnet $[p]_0$ die Menge $\{0;1;2;3;\cdots;p\}$, so erhalten wir für jede natürliche Zahl $p \geq 2$ eine Funktion

$$\begin{aligned}
\vartheta_{p-1} \colon [p-1]_0^{\mathbb{N}_0} &\longrightarrow I \\
(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0} &\longmapsto \textstyle\sum_{i \geq 0} \frac{x_i}{p^{i+1}}.
\end{aligned}$$

Die Abbildung ϑ_{p-1} ist surjektiv und lediglich an abzählbar vielen Stellen nicht injektiv. Die Zahlen $x \in [0;1]$, die mehr als ein Urbild haben, besitzen genau zwei Urbilder und diese stammen von der Identität $\sum_{i \geq n} \frac{p-1}{p^{i+1}} = \frac{1}{p^n}$, siehe Aufgabe 1. Wir fassen diese Tatsachen für den Fall triadischer Brüche, das heißt für $p = 3$, noch einmal im folgenden Korollar zusammen.

I.8.2 Korollar: *Ist $c \in \mathcal{C}$ so gelten folgende Aussagen:*
(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $c \in R_n$.
(b) Es gibt entweder genau eine oder genau zwei verschiedene triadische Darstellungen von c.

Da wir zeigen werden, dass das Cantorsche Diskontinuum $(\mathcal{C}, \mathcal{O}_\mathcal{C})$ homöomorph zu $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$ (versehen mit einer geeigneten Topologie) ist, wird die Einschränkung $\tilde{s}$ von $s := \vartheta_2$ auf $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$ für uns interessanter sein als die Abbildung s. Zur

Vereinfachung der Notation schreiben wir ξ oder (x_i) für eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und zeigen zunächst, dass $\tilde{s}$ eine Bijektion zwischen der Menge $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$ und dem Cantorschen Diskontinuum ist.

I.8.3 Satz: *Die Abbildung $\tilde{s}$ ist injektiv und es gilt $Im(\tilde{s}) = \mathcal{C}$.*

Beweis: Zunächst ist $t := s_{|\{0;1\}^{\mathbb{N}_0}}$ nach Teil (b) der Aufgabe am Ende des Abschnitts injektiv. Für beliebiges $(x_i) \in \{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$ gilt $(\frac{x_i}{2}) \in \{0;1\}^{\mathbb{N}_0}$. Setzen wir $y_i := \frac{x_i}{2}$ für $i \in \mathbb{N}_0$, so folgt die Injektivität von $\tilde{s}$ aus der Injektivität der Abbildung $s_{|\{0;1\}^{\mathbb{N}_0}}$ wegen $\tilde{s}\left((x_i)\right) = 2 \cdot t\left((y_i)\right)$.
Setzen wir

$$M_n := \left\{(x_i) \in \{0;1;2\}^{\mathbb{N}_0} \;\middle|\; x_i \in \{0;2\} \text{ für } i \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } i < n\right\},$$

so gilt $s\,[M_n] = R_n$ und es folgt die Inklusion

$$s\left[\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}\right] = s\left[\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} M_n\right] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} s\,[M_n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} R_n = \mathcal{C}.$$

Es bleibt, die Inklusion $\mathcal{C} \subseteq s\left[\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}\right]$ zu zeigen.
Sei nun $c \in \mathcal{C} \subseteq [0;1]$, dann hat c nach Korollar I.8.2 genau eine oder zwei verschiedene triadische Darstellungen. Kommt eine der Darstellungen ohne die Ziffer 1 aus, so sind wir fertig. Hat c genau eine triadische Darstellung $\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{c_i}{3^{i+1}}$ und kommt die Ziffer 1 vor, so gibt es einen kleinsten Index k mit $c_k = 1$. Das bedeutet aber $c \notin R_{k+1}$, was Korollar I.8.2 (a) widerspricht. Hat c genau zwei verschiedene triadische Darstellungen $\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{c_i}{3^{i+1}}$ und $\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{d_i}{3^{i+1}}$, wobei in beiden die Ziffer 1 vorkommt, so gibt es jeweils kleinste Indices k und ℓ mit $c_k = 1$ und $d_\ell = 1$. Für $m = \max\{k;\ell\}$ folgt nun $c \notin R_{m+1}$, was abermals Korollar I.8.2 (a) widerspricht. Insgesamt folgt nun $\mathcal{C} \subseteq s\left[\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}\right]$. □

I.8.4 Korollar: *Die Mengen $\mathcal{C}$ und $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{C}$ und $[0;1]$ gleichmächtig sind.
Wir definieren nun eine Funktion $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow [0;1]$. Für $c \in \mathcal{C}$ folgt aus Satz I.8.3 eine eindeutige Darstellung $c = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{c_i}{3^{i+1}}$ mit $c_i \in \{0;2\}$. Setze

$$\varphi(c) := \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{d_i}{2^{i+1}} \text{ mit } d_i := \frac{c_i}{2} \in \{0;1\}.$$

Da (d_i) jede Folge beliebige Folge in $\{0;1\}^{\mathbb{N}_0}$ sein kann, ist φ ist surjektiv. Gleichzeitig ist φ wie s_p nicht injektiv. Das Intervall $[0;1]$ ist damit gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathcal{C}$. Offensichtlich ist $\mathcal{C}$ auch gleichmächtig zu einer Teilmenge von $[0;1]$. Die Behauptung folgt nun mit dem Satz von Cantor, Bernstein und Schröder. □

Mit der richtigen Topologie versehen, sind die beiden topologischen Räume $\mathcal{C}$ und $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$ sogar homöomorph. Eine naheliegende und hoffentlich gute Wahl ist, die Menge $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$ als Unterraum des Produktraums $\{0;1;2\}^{\mathbb{N}_0}$ aufzufassen, wobei wir $\{0;1;2\}$ mit der diskreten Topologie versehen. Für diese Wahl zeigen wir nun die Stetigkeit der Abbildung s.

I.8.5 Satz: *Die Abbildung* $s\colon \{0;1;2\}^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow I$ *mit* $(x_i) \longmapsto \sum_{i\geq 0} \frac{x_i}{3^{i+1}}$ *ist stetig.*

Beweis: Nach Bemerkung I.2.14 genügt es, die Stetigkeit von s bezüglich einer Umgebungsbasis von $\xi = (x_i) \in \{0;1;2\}^{\mathbb{N}_0}$ und von $s(\xi) \in I$ zu überprüfen. Wir betrachten nun die folgenden Umgebungsbasen:

(a) Für $(x_i) \in \{0;1;2\}^{\mathbb{N}_0}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Menge

$$U^n_{(x_i)} := \left\{ (y_i) \in \{0;1;2\}^{\mathbb{N}_0} \;\middle|\; x_i = y_i \text{ für } i \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } i < n \right\}$$

eine Umgebung von (x_i) und

$$\mathcal{U}_{(x_i)} := \left\{ U^n_{(x_i)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

eine Umgebungsbasis von $(x_i) \in \{0;1;2\}^{\mathbb{N}_0}$.

(b) Da $[0;1]$ die Spurtopologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{nat})$ trägt, betrachten wir als Umgebungsbasis von $s(\xi)$ die offenen Bälle vom Durchmesser $\varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(s(\xi)) = \{y \in [0;1] \mid d(y - s(\xi)) < \varepsilon\}.$$

Sei nun ein Element $B_\varepsilon(s(\xi))$ der Umgebungsbasis von $s(\xi)$ (oder äquivalent ein $\varepsilon > 0$) gegeben. Wählen wir $N > n(\varepsilon)$ mit $\frac{1}{3^{n(\varepsilon)}} < \varepsilon$, so folgt für $\xi' = (x'_i) \in U^N_{(x_i)}$:

$$d\big(s(\xi') - s(\xi)\big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{|x'_i - x_i|}{3^{i+1}} < \sum_{i=N}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{1}{3^N} < \varepsilon.$$

Damit ist s stetig in $\xi = (x_i)$. □

Da die Bijektion $\tilde{s}$ durch Einschränken von s definiert ist, folgt sofort:

I.8.6 Korollar: $\tilde{s}\colon \{0;2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{C}$ *ist bijektiv und stetig.*

Um zu zeigen, dass $(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})$ und $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$ tatsächlich homöomorph sind, muss nun noch die Stetigkeit von $\tilde{s}^{-1}$ nachgewiesen werden. Dazu beschreiben wir zunächst eine Basis der Topologie von $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$.

I.8.7 Definition: *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $x = (x_0, \cdots, x_{n-1}) \in \{0;2\}^n$ *sei*

$$V^n_x := \left\{(y_i) \in \{0;2\}^{\mathbb{N}_0} \;\middle|\; x_i = y_i \text{ für } i < n\right\}.$$

I.8.8 Satz: *Die Mengen* V^n_x *mit* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $x \in \{0;2\}^n$ *bilden eine Basis der Topologie auf* $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$.

Beweis:

(1) V^n_x ist offen in der Spurtopologie, da nur endlich viele y_i vorgegeben sind und $\{y_i\}$ offen in $\{0;1;2\}$ ist.

(2) Sei $\prod_{i\in\mathbb{N}_0} O_i$ eine Elementarmenge der Produkttopologie von $\prod\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$, also ein Element der Basis der Topologie, wie in Lemma I.5.6 beschrieben. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $O_i = \{0;2\}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \geq n$ und es gilt

$$\prod_{\mathbb{N}_0} O_i = \bigcup_{x\in O_1\times\cdots\times O_n} V^n_x.$$

Damit ist gezeigt, dass die V_x^n eine Basis der Topologie auf $\{0;2\}^{\mathbb{N}_0}$ bilden. $\square$

I.8.9 Satz: *Die Abbildung* $\tilde{s} : \{0;2\}^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow \mathcal{C}$ *ist ein Homöomorphismus.*

Beweis: Wir wissen bereits, dass $\tilde{s}$ eine stetige Bijektion ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{s}$ eine offene Abbildung ist. Es genügt, dies für die Basismengen V_x^n nachzuweisen. Wie im Beweis zu Satz I.8.3 gilt

$$\tilde{s}[V_x^n] = R_x^n \cap \mathcal{C}.$$

Nun ist R_x^n offen und abgeschlossen in $R_n(I)$ und damit auch offen in $\mathcal{C}$. $\square$

Aufgabe:
Zeige die folgenden Aussagen für eine beliebige natürliche Zahl $p \geq 2$:
(a) Jede reelle Zahl $z \in [0;1]$ besitzt höchstens zwei verschiedene Darstellungen als p-adischen Bruch.
(b) Schränken wir die Abbildung ϑ_{p-1} auf $[p-2]_0^{\mathbb{N}_0}$ ein, so ist sie injektiv.

Hinweis: Angenommen, es gibt zwei verschiedene Darstellungen

$$z = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{a_i}{p^{i+1}} = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \frac{b_i}{p^{i+1}}.$$

Dann genügt es, die folgenden drei Fälle zu studieren.
(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ exisitieren $r, s \in \mathbb{N}$ mit $r, s > n$ und $a_r > 0$ und $a_s < p-1$.
(b) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $a_r = 0$ für alle $r > n$ gilt.
(c) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $a_r = p-1$ für alle $r > n$.

Literaturverzeichnis

[1] K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] B. v. Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1979.