Der Diracoperator und sein Spektrum auf semiriemannschen Mannigfaltigkeiten

Diplomarbeit am
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Carsten Lange

unter Betreuung von
Prof. Dr. Helga Baum
Prof. Dr. Elmar Vogt

Februar 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Diracoperator wurde erstmals in der relativistischen Quantenmechanik untersucht, um das Elektron besser zu verstehen. Die dabei von Paul Andrè Maurice Dirac benutzte Konstruktionsmethode wurde dann in den 60-er Jahren von Sir Michael Atiyah und Isadore Singer benutzt, um auf gewissen riemannschen Mannigfaltigkeiten einen kanonischen elliptischen Operator definieren zu können, dessen Index in Relation zu topologischen Invarianten der Mannigfaltigkeit steht. Seit dem Atiyah-Singer-Indexsatz ist der Operator, lösgelöst von der physikalischen Theorie, ein häufig untersuchtes Objekt, in dem viele Informationen der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit kodiert sind.

In der ersten Hälfte der zwanziger Jahre wurde das magnetische Verhalten von Atomspektren untersucht. Eine erste Erklärung der beobachteten Phänomene war das Landèsche Vektormodell. Die physikalische Interpretation bereitete aber Schwierigkeiten, bis George Uhlenbeck und Samuel Goudsmit [UG25] 1925 vorschlugen, dem Elektron eine „Eigenrotation" mit Quantenzahl $\frac{1}{2}$ und magnetischem Moment von einem Bohrschen Magneton zuzuordnen. Diese „Eigenrotation" wird heute auch Elektronenspin genannt und ist ein zusätzlicher innerer Freiheitsgrad. In einer Arbeit von 1927 griff Wolfgang Pauli [Pau27] die Idee von George Uhlenbeck und Samuel Goudsmit auf und konnte das Elektron in einer nicht relativistischen Quantenmechanik zufriedenstellend beschreiben. In der gleichen Arbeit führte er auch die nach ihm benannten Matrizen ein.

Entsprechend dem von Werner Heisenberg vorgeschlagenen Weg, nicht quantenmechanischer Ausdrücke durch die Substitution Energie $E \mapsto ih\frac{\partial}{\partial t}$ und i-te Impulskoordinate $p_i \mapsto -ih\frac{\partial}{\partial x_i}$ in quantenmechanische zu übertragen, schlug Walter Gordon bereits 1926 als relativistisch-quantenmechanische Wellengleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld mit Skalarpotential A_0 und Vektorpotential $\mathbf{A}$ die Gleichung

$$\left(\left(\frac{ih}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{e}{c}A_0\right)^2+\sum_{r+1}^{3}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_r}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+m_e^2c^2\right)\Psi=0$$

vor. Diese Gleichung enthält eine zweite Ableitung in t, eine für Physiker unerwünschte Eigenschaft, da die Lösungen dann nicht mehr a priori durch einen Anfangswert determiniert sind.

Paul Andrè Maurice Dirac leitete 1928 in [Dir28] unter Verwendung der Pauli-Matrizen eine andere Gleichung her. Diese impliziert im feldfreien Fall die von Walter Gordon vorgeschlagene Gleichung, enthält aber in allen Variablen nur Ableitungen höchstens erster Ordnung. Von dieser feldfreien Gleichung ausgehend folgt mit den in der klassischen Physik üblichen Substitutionen eine Gleichung für den Fall, in dem ein elektromagnetisches Feld vorliegt. Auch in diesem Fall versuchte Paul Andrè Maurice Dirac die Gordonsche Gleichung abzuleiten. Diesmal war er jedoch nicht erfolgreich, er erhielt einen zusätzlichen komplexwertigen Summanden, dessen Realteil genau dem von George Uhlenbeck und Samuel Goudsmit postulierten magnetischen Moment entspricht.

Paul Dirac gab also unter Berücksichtigung des Spins eine Differentialgleichung erster Ordnung in den Raum- und Zeitkoordinaten an. Diese muß die Wellenfunktion eines Elektrons erfüllen, das sich unter unter Wirkung eines elektromagnetischen Feldes im Lorentzraum $\mathbb{R}^{4,1}$ bewegt. Als Summand tritt das Produkt der Wellenfunktion Ψ mit dem Vielfachen der Ruhemasse λ auf. Wird dieser Term vernachlässigt und der übrigbleibende Differentialoperator auf den Wellenfunktionen mit D bezeichnet, so kann die von Dirac aufgestellte Gleichung als Eigenwertgleichung aufgefaßt werden:

$$(D + \lambda \,\mathrm{Id})\Psi = 0.$$

Der Eigenwert kodiert also im wesentlichen die Ruhemasse des Teilchens, das der Wellenfunktion Ψ zugeordnet ist.

Ausgehend vom Hirzebruch-Riemann-Roch-Satz der komplexen algebraischen Geometrie stellte sich Anfang der 60-er Jahre die Frage nach einem Analogon auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M: Kann der Index eines elliptischen Operators auf M mit topologischen Größen identifiziert werden? Sir Michael Atiyah und Isadore Singer erkannten als erste, daß auf orientierbaren kompakten Mannigfaltigkeiten mit Spinstruktur auf kanonische Art ein elliptischer Differentialoperator konstruiert werden kann. Sein Index ist die gesuchte topologische Invariante. Der Atiyah-Singer-Indexsatz bringt nun diese Invariante mit einem beliebigen elliptischen Differentialoperator auf M in Verbindung. Der kanonisch konstruierte Operator wird auch Diracoperator genannt, da seine Konstruktion mit der von Paul Dirac benutzten eng verwandt ist. Der von Sir Michael Atiyah und Isadore Singer beschrittene Weg ist nicht auf riemannsche Mannigfaltigkeiten beschränkt. Im Fall $M = \mathbb{R}^{4,1}$ stimmt der von ihnen konstruierte Operator mit dem von Paul Dirac angegebenen überein.

In den folgenden Jahren wurde der von Sir Michael Atiyah und Isadore Singer beschriebene Operator eingehend studiert, im folgenden sei M stets orientiert und kompakt. Neben seiner Elliptizität ist er im geeignet gewählten Funktionenraum auch wesentlich selbstadjungiert. Daraus folgt insbesondere, daß sein Spektrum reellwertig ist und weder stetiges Spektrum noch Restspektrum auftreten. Ebenso ist das Spektrum in geraden Dimensionen stets symmetrisch zum Ursprung. Geometrische Größen sind ebenfalls im Spektrum kodiert. Stellvertretend seien hier die beiden folgenden Resultate genannt:

- Thomas Friedrich zeigte in [Fri80], daß von Null verschiedene Eigenwerte λ in der folgenden Beziehung zum Minimum R_0 der Skalarkrümmung von M^n stehen:
$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} R_0.$$
- Klaus-Dieter Kirchberg zeigte in [Kir86],[Kir88] und [Kir90], daß im Fall einer kählerschen Mannigfaltigkeit M^{2k} diese Ungleichung noch verschärft werden kann. Für gerades k bewies er
$$\lambda^2 \geq \frac{k}{4(k-1)} R_0,$$
während er für ungerades k die Ungleichung
$$\lambda^2 \geq \frac{k+1}{4k} R_0$$
nachwies.

Neben dem Diracoperator D ist ein weiterer Operator kanonisch gegeben: der Twistoroperator T. Spinoren, die im Kern des Twistoroperators liegen werden auch Twistorspinoren genannt. Sind sie gleichzeitig Eigenspinoren vom Diracoperator zum Eigenwert $\mu \neq 0$, so werden sie auch Killingspinoren zur stets reellen oder rein imaginären Killingzahl μ genannt. Die Existenz von Killigspinoren zur Killingzahl μ hat starke geometrische Konsequenzen:

- Die Skalarkrümmung muß konstant sein. Im Fall $\mu \neq 0$ reell ist sie positiv, während sie für rein imaginäres $\mu \neq 0$ negativ sein muß.
- Die Mannigfaltigkeit muß einsteinsch sein.
- Ist $\mu \neq 0$, so ist M lokal irreduzibel.

Ein harmonischer Spinor ist ein nicht trivialer Spinor mit $D\varphi = 0$. Ist er darüber hinaus ein Twistorspinor, so wird er auch parallel genannt. Parallele Spinoren auf dem Kegel über M stehen in enger Beziehung zu Killingspinoren auf M.

Auf semiriemannschen Spinmannigfaltigkeiten $M^{n,k}$ mit $k \notin \{0; n\}$ ist die Lage etwas schwieriger. Helga Baum [Bau81] zeigte beispielsweise 1981, daß der Diracoperator in geeigneten Räumen, sogenannten Kreinräumen, noch immer wesentlich selbstadjungiert ist. Weiterhin ist der Operator im allgemeinen nicht mehr elliptisch. Das Spektrum des Diracoperators auf orientierbaren und kompakten Mannigfaltigkeiten kann echt komplexwertig werden und neben dem Punktspektrum können auch Restspektrum und stetiges Spektrum auftreten. Aus der allgemeinen Theorie selbstadjungierter Operatoren in Kreinräumen folgerte Helga Baum jedoch in geraden Dimensionen, daß das Restspektrum stets verschwindet. Weiterhin nutzte sie eine Idee von Nigel Hitchin [Hit74], um das Punktspektrum auf rechteckigen flachen Lorentztori der Dimension drei und auf der Sphäre $S^{3,2}$ zu berechnen.

In diesen Fällen konnte sie wiederum aus allgemeingültigen Symmetrieüberlegungen folgern, daß kein Restspektrum auftritt. Weiterhin zeigen diese Beispiele, daß das Symmetrieverhalten des Spektrums in geraden Dimensionen anders ist als in ungeraden Dimensionen. Georg Heß wandte in seiner Dissertation [Heß96] ebenfalls das von Nigel Hitchin vorgeschlagene Verfahren an, um für beliebige rechteckige flache Tori auf darstellungstheoretischem Weg eine Obermenge des Punktspektrums anzugeben; in geraden Dimension konnte er Gleicheit folgern. Christian Ohn und Anne-Joëlle Vanderwinden war es in [OV93] ebenfalls möglich das Punktspektrum mit darstellungstheoretischen Mitteln in einem Spezialfall zu berechnen: dem kompaktifizierten Minkowskiraum $S^{3,3} \times S^1$.

In den letzten Jahren wurden Twistorspinoren auch auf semiriemannschen Mannigfaltigkeiten untersucht, in diesem Zusammenhang sei auf die Diplomarbeit von Christoph Bohle [Boh98] verwiesen.

Im ersten Kapitel werden die grundlegenden Begriffe eingeführt und die wichtigsten später benötigten Eigenschaften bewiesen. Dies geschieht in Anlehnung an [Bau81]. Vertrautheit mit riemannscher Spingeometrie ist sicherlich vorteilhaft, sie wird aber nicht vorausgesetzt. Demgegenüber sind Kenntnisse in der modernen Sprache der Differentialgeometrie, also von Hauptfaserbündeln, assoziierten Vektorbündeln und linearen Zusammenhängen beziehungsweise kovarianten Ableitungen notwendig.

Allgemeine Spektraleigenschaften des Diracoperators werden im zweiten Kapitel bewiesen. Dazu werden erst wichtige Begriffe der Funktionalanalysis wiederholt und der Begriff eines Kreinraums eingeführt. Es wird bewiesen, daß jede Potenz des Diracoperators im Kreinraum wesentlich selbstadjungiert ist. Damit muß das Spektrum des Diracoperators allgemeine Symmetrieeigenschaften besitzen, vergleiche [Bau81]. Zusammen mit Abbildungen, die mit dem Diracoperator je nach Dimension der Mannigfaltigkeit und Index der Metrik kommutieren oder antikommutieren und im ersten Kapitel untersucht wurden, können dann die Hauptresultate des zweiten Kapitels bewiesen werden: Symmetrieeigenschaften der einzelnen Spektralteile in Abhängigkeit von Dimension und Index und das Verschwinden des Restspektrums in den Dimensionen $n \equiv 0, 2, 3 \mod 4$.

Im dritten Kapitel wird ein Kalkül entwickelt, mit dem der Diracoperator auf semiriemannschen Produkträumen einer Mannigfaltigkeit $(B^{n,k}, g)$ beschrieben werden kann. Dabei wird zunächst der Fall eines Produktraums von Typ $(B \times \mathbb{R}, g \pm \sigma(t)\,\mathrm{dt})$ und des „Warped-Produkts“ $(B \times \mathbb{R}, \sigma(t)g \pm \mathrm{dt})$ untersucht, die dann eine Beschreibung der Produkte und Warped-Produkte mit S^1 ermöglichen. Bei den Produkten mit $\mathbb{R}$ handelt es sich um eine Übertragung des entsprechenden

Formalismus für Produkte aus dem riemannschen Fall, wie er beispielsweise in [BFGK91] zu finden ist. Der beschriebene Kalkül ermöglicht auf bestimmten Produkträumen, nämlich denen mit konstanter Funktion σ, aus dem Spektrum auf $B^{n,k}$ zumindest eine Teilmenge des Punktspektrums auf $M \times S^1$ zu berechnen. Die Kenntnis von Eigenspinoren auf B ermöglicht in diesem Fall auch die Konstruktion von Eigenspinoren auf dem Produktraum.

Der Kalkül wird nun im vierten Kapitel angewandt: Das Punktspektrum auf rechteckigen flachen Tori und den Produkten $S^{n,0} \times S^{1,0}$ und $S^{n,0} \times S^{1,1}$ wird untersucht.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meiner Familie und allen Freunden bedanken, die diese Arbeit ermöglicht haben. Namentlich herausgehoben sei Frau Prof. Dr. Helga Baum, die mit ihren exzellenten Vorlesungen den geometrischen Grundstein legte, diese Arbeit anregte und stets mit großer Hilfsbereitschaft und wertvollen Ratschlägen zur Seite stand.

Carsten Lange

1. Grundlagen

Ziel dieses ersten Kapitels soll es sein, in die benutzte Notation einzuführen. Es handelt sich hierbei um eine Zusammenfassung wesentlicher Aspekte aus [LM89], [Fri97] und [Bau81]. Da stets nicht ausgeartete indefinte Metriken und Skalarprodukte betrachtet werden, sind die aus den beiden erstgenannten Werken entsprechend angepaßt und das Rückgrat der Darstellung ist die an dritter Stelle genannte Referenz.

1.1. **Cliffordalgebren.**

Jedem Vektorraum endlicher Dimension, auf dem eine positiv definite, negativ definite oder indefinite nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform gegeben ist, läßt sich eine eindeutig bestimmte assoziative Algebra mit 1 zuordnen. Diese Algebra heißt Cliffordalgebra des Vektorraums und ist das Fundament der Arbeit. Da ausschließlich glatte Mannigfaltigkeiten untersucht werden, ist dieser Abschnitt nicht in größtmöglicher Allgemeinheit verfaßt, sondern auf den Fall reeller und komplexer Vektorräume beschränkt. Der allgemeine Fall wird beispielsweise in [LM89] beschrieben. Dort sind die Beweise der hier zitierten und bemerkten Fakten zu finden. Am Ende des Abschnitts wird eine konkrete Realisierung der reellen und komplexen Cliffordalgebren angegeben, die den Rest der Arbeit verwendet wird. Sie ist eine auf den indefinten Fall verallgemeinerte Realisierung der in [BFGK91] benutzten, und sie unterscheidet sich von der in [Bau81] gebrauchten Realisierung mit Pauli-Matrizen.

Definition 1.1.1. *Mit $\mathbb{R}^{n,k}$ wird der n-dimensionale reelle Vektorraum zusammen mit der nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle_{n,k}$ bezeichnet, wobei $\langle\ ,\ \rangle_{n,k}$ den Index k hat. Eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ sei zumindest für die nächsten zwei Kapitel stets so gewählt, daß für das Skalarprodukt der ersten $r := n-k$ Vektoren $\langle e_i, e_i\rangle_{n,k} = 1$ und der letzten k Vektoren $\langle e_i, e_i\rangle_{n,k} = -1$ gilt. Dieser Sachverhalt wird kurz mit $\langle e_i, e_j\rangle_{n,k} = \epsilon_i\delta_{ij}$ beschrieben, wobei $\epsilon_i = 1$ für $i \leq r$ und $\epsilon_i = -1$ für $i > r$ gelte.*

Ein Element $x \in \mathbb{R}^{n,k}$ heißt raumartig (zeitartig, lichtartig), falls das Skalarprodukt mit sich selbst positiv (negativ, Null) ist.

Analoge Konventionen sollen für (lokale) Orthonormalbasen einer semiriemannschen Mannigfaltigkeit gelten.

Definition 1.1.2. *Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen, $\mathcal{C}$ eine $\mathbb{K}$-Algebra, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension und f eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Ferner bezeichne $\beta : \mathcal{C} \to V$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Dann wird das Paar $(\mathcal{C}, \beta)$ Cliffordalgebra von (V, f) genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$\mathcal{C}$ ist eine assoziative Algebra mit 1.*
2. *β hat für alle $x \in V$ die Eigenschaft $\beta(x) \cdot \beta(x) = -f(x,x) \cdot 1$.*
3. *Für jede assoziative $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{D}$ mit 1 und jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\delta : \mathcal{D} \longrightarrow V$ mit $\delta(x) \cdot \delta(x) = -f(x,x) \cdot 1$ für alle $x \in V$ existiert ein Algebrenhomomorphismus $u : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, so daß $\delta \circ u = \beta$ gilt.*

Bemerkung 1.1.3.

1. *Die Cliffordalgebra $(\mathcal{C}, \beta)$ zu (V, f) ist eindeutig bestimmt und wird mit $Cl(V, f)$ bezeichnet.*

2. $Cl_{n,k}$ *wird im folgenden abkürzend für* $Cl(\mathbb{R}^{n,k})$ *und* $Cl^c_{n,k}$ *für* $Cl(\mathbb{C}^{n,k})$ *verwandt.*
3. *Die komplexifizierte Cliffordalgebra des* $\mathbb{R}^{n,k}$ *ist zur Cliffordalgebra des* $\mathbb{C}^{n,k}$ *isomorph, das bedeutet, daß* $Cl_{n,k} \otimes \mathbb{C} = Cl^c_{n,k}$ *gilt.*
4. *Für alle* $0 \leq k \leq n$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $Cl^c_{n,k} \cong Cl^c_n := Cl^c_{n,0}$.
5. *Jede Cliffordalgebra* $\mathcal{C}$ *ist eine* $\mathbb{Z}_2$*-gradierte Algebra, das heißt, daß zwei disjunkte Teilmengen* $\mathcal{C}^0$ *und* $\mathcal{C}^1$ *von* $\mathcal{C}$ *existieren, so daß sich jedes* $c \in \mathcal{C}$ *als Summe zweier Elemente aus* $\mathcal{C}^0$ *und* $\mathcal{C}^1$ *schreiben läßt,* $\mathcal{C}^0$ *eine Unteralgebra von* $\mathcal{C}$ *ist und* $\mathcal{C}^i \cdot \mathcal{C}^j = \mathcal{C}^{i+j(mod\ 2)}$ *gilt. Die Unteralgebra* $\mathcal{C}^0$ *ist von Produkten einer geraden Anzahl von Basisvektoren erzeugt. Die Menge* $\mathcal{C}^1$ *besteht aus Linearkombinationen von Elementen der Cliffordalgebra, die Produkte von ungerade vielen Basisvektoren sind.*

Beispiel 1.1.4.

1. $Cl_1 = Cl_{1,0}$ *ist isomorph zu* $\mathbb{C}$.
2. $Cl_{1,1}$ *ist isomorph zu* $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.
3. $Cl_2 = Cl_{2,0}$ *ist isomorph zu* $\mathbb{H}$.
4. $Cl_{2,1}$ *ist isomorph zu* $\mathbb{R}(2)$*, der Matrizenalgebra der reellen 2×2-Matrizen.*
5. $Cl_{2,2}$ *ist ebenfalls isomorph zu* $\mathbb{R}(2)$*, doch der Isomorphismus ist ein anderer als der für* $Cl_{2,1}$.
6. Cl^c_1 *ist isomorph zu* $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.
7. Cl^c_2 *ist isomorph zu* $\mathbb{C}(2)$.

Satz 1.1.5 ([LM89], S.24 und S.27).
Für alle $n \geq 0$ *und* $k \leq n$ *gilt:*

1. $Cl_{n,0} \otimes Cl_{2,2} \cong Cl_{n+2,n+2}$
2. $Cl_{n,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0}$
3. $Cl_{n,k} \otimes Cl_{2,1} \cong Cl_{n+2,k+1}$
4. $Cl_{n+8,0} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}$
5. $Cl_{n+8,n+8} \cong Cl_{n,n} \otimes Cl_{8,8}$
6. $Cl^c_{n+2} \cong Cl^c_n \otimes_{\mathbb{C}} Cl^c_2$

Die Tensorprodukte in Satz 1.1.5 erhalten die Gradierung der Algebren nicht. Mit Satz 1.1.5 ist es möglich die Cliffordalgebren von $\mathbb{R}^{n,k}$ und $\mathbb{C}^n$ als Matrizenalgebren mit komplexen Einträgen aufzufassen. Diese Identifizierungen werden als nächstes explizit dargestellt.

Bemerkung 1.1.6.

1. *Der Fall* $Cl_{1,k}$*:*
   Die Cliffordalgebra Cl^c_1 *ist isomorph zu* $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$*, der Algebrenisomorphismus ist* $\kappa^c_{1,k}(e_1) = i^k(i, -i)$*. Die reellen Cliffordalgebren* $Cl_{1,0}$ *und* $Cl_{1,1}$ *werden nun als Unteralgebren realisiert:*
   Die reelle Cliffordalgebra $Cl_{1,0}$ *ist isomorph zum Körper der komplexen Zahlen. Zwei Isomorphismen* $\kappa_{1,0}$ *und* $\hat{\kappa}_{1,0}$ *sind durch*

die Projektion von $\kappa^c_{1,0}$ auf die erste beziehungsweise zweite Komponente gegeben.

Die reelle Cliffordalgebra $Cl_{1,1}$ ist isomorph zu der Algebra $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ mit der Multiplikation $(a,b)\cdot(c,d) = (ac+bd, ad+bc)$. Zwei Isomorphismen $\kappa_{1,0}$ und $\hat{\kappa}_{1,0}$ sind auch hier durch die Projektion von $\kappa^c_{1,1}$ auf die erste beziehungsweise zweite Komponente gegeben.

2. *Der Fall $Cl_{2m,k}, m \in \mathbb{N}$:*
Die Cliffordalgebra Cl^c_{2m} ist isomorph zu $\mathbb{C}(2^m)$. Wir definieren

$$U_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(j) = \begin{cases} 1, & j \textit{ ungerade} \\ 2, & j \textit{ gerade,} \end{cases} \quad \textit{und} \quad \tau_j = \begin{cases} 1, & e_j \textit{ raumartig} \\ i, & e_j \textit{ zeitartig.} \end{cases}$$

Die reelle Cliffordalgebra $Cl_{2m,k}$ läßt sich als Unteralgebra von Cl^c_{2m} auffassen. Ein Algebrenisomorphismus von von $Cl_{2m,k}$ in eine Unteralgebra von $\mathbb{C}(2^m)$ ist durch folgende Festsetzung auf den Basisvektoren $\{e_j\}_{1\le j\le 2m}$ von $\mathbb{R}^{2m,k}$ gegeben:

$$\kappa_{2m,k}(e_j) = \tau_j \cdot \Big(\big(\bigotimes_{m-1-\lfloor\frac{j-1}{2}\rfloor} E \big) \otimes U_{\alpha(j)} \otimes \big(\bigotimes_{\lfloor\frac{j-1}{2}\rfloor} T \big) \Big) \in \mathbb{C}(2^m)$$

3. *Der Fall $Cl_{2m+1,k}, m \in \mathbb{N}$:*
Die Algebra $Cl_{2m+1,k}$ kann auf die folgende Art als Unteralgebra von $Cl^c_{2m+1} \cong \mathbb{C}(2^m)\oplus\mathbb{C}(2^m)$ aufgefaßt werden. Wir setzen fest:

$$\kappa^c_{2m+1,k}(e_j) := \begin{cases} \big(\kappa_{2m,k}(e_j), \kappa_{2m,k}(e_j)\big), & \textit{für } j = 1,\cdots,2m \\ \tau_{2m+1}\cdot\big(i \bigotimes_m T, -i\bigotimes_m T\big), & \textit{für } j = 2m+1. \end{cases}$$

Dabei ist $\tau_{2m+1} = 1$ falls e_{2m+1} raumartig und $\tau_{2m+1} = i$ falls e_{2m+1} zeitartig ist. Die Projektion von $\kappa^c_{2m+1,k}$ auf die erste beziehungsweise zweite Komponente wird mit $\kappa_{2m+1,k}$ beziehungsweise $\hat{\kappa}_{2m+1,k}$ bezeichnet.

Die beiden Realisierungen liefern zwei verschiedene, aber äquivalente 2^m-dimensionale irreduzible Darstellungen der Cliffordalgebra.

Lemma 1.1.7. *Für $l \in \mathbb{N}$ und $1 \le j \le l$ gilt $\kappa_{l,k}(e_j)^\perp = -\epsilon_j \overline{\kappa_{l,k}(e_j)}$.*

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz des Kroneckerproduktes von Matrizen. Es gelten $(A\otimes B)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp$ und $\overline{A\otimes B} = \overline{A}\otimes\overline{B}$. Damit folgt für l gerade:

$$\begin{aligned} \kappa_{l,k}(e_j)^\perp &= \tau_j \left((\otimes E^\perp) \otimes U^\perp_{\alpha(j)} \otimes (\otimes T^\perp) \right) \\ &= (-1)^{\lfloor (j-1)/2 \rfloor} \kappa_{l,k}(e_j) \\ &= \epsilon_j \overline{\tau_j} \left((\otimes E) \otimes -\overline{U}_{\alpha(j)} \otimes (\otimes \overline{T}) \right) = -\epsilon_j \kappa_{l,k}(e_j). \end{aligned}$$

Der Fall für l ungerade wird analog berechnet. ☐

1.2. $O(n,k)$-Untergruppen und zweifache Überlagerungen.

Für reelle Vektorräume $\mathbb{R}^{n,k}$ mit einem indefiniten und nicht ausgearteten Skalarprodukt lassen sich die Untergruppen $O(n,k)$ und $SO(n,k)$ der Automorphismengruppe definieren. Diese sind Verallgemeinerungen der orthogonalen und speziellen orthogonalen Gruppe euklidischer Vektorräume. Für beliebiges k sind diese Gruppen nicht zusammenhängende topologische Räume, ihre Bogenzusammenhangskomponenten werden angegeben. Sie stehen in enger Beziehung zu verschiedenen Orientierbarkeitsbegriffen von Endorphismen auf $\mathbb{R}^{n,k}$. Weiterhin werden die fünf Untergruppen $Pin(n,k)$, $Pin_s(n,k)$, $Pin_t(n,k)$, $Spin(n,k)$ und $Spin_+(n,k)$ der rellen Cliffordalgebra $Cl_{n,k}$ definiert, deren Bogenzusammenhangskomponenten angegeben und mit denen von $O(n,k)$ in Verbindung gebracht: Es gibt eine zweifache Überlagerungsabbildung λ, die die Zusammanhangskomponenten von $Pin(n,k)$ auf die Zusammenhangskomponenten von $O(n,k)$ abbildet. Außerdem werden in diesem Abschnitt maximal kompakte Untergruppen der $O(n,k)$, $SO(n,k)$, $Pin(n,k)$ und $Spin(n,k)$ angegeben.

Die Aussagen $O(n,k)$ und $SO(n,k)$ betreffend sind im Standardwerk über semiriemannsche Geometrie [O'N83] nachzulesen. Diese und die darüber hinausgehenden Bemerkungen über $Pin(n,k)$ und $Spin(n,k)$ werden in [Bau81], [LM89] bewiesen.

Definition 1.2.1. *Die orthogonale Gruppe $O(n,k)$ und die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n,k)$ sind durch*

$$\begin{aligned} O(n,k) &:= \{f \in GL(n,\mathbb{R}) \quad | \quad f \text{ läßt } \langle\ ,\ \rangle_{n,k} \text{ invariant } \} \\ \text{und } SO(n,k) &:= \{f \in O(n,k) \quad | \quad f \text{ orientierungserhaltend } \} \end{aligned}$$

definiert.

Bemerkung 1.2.2.

1. *Im Gegensatz zum euklidischen Fall ist für $k \notin \{0,n\}$ weder $O(n,k)$ kompakt noch $SO(n,k)$ zusammenhängend.*

   Die folgende unbeschränkte Untergruppe von $O(n,k)$ zeigt, daß $O(n,k)$ nicht kompakt sein kann:

   $$\left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & Id & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \quad \middle| \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

   Die Bogenzusammenhangskomponenten werden in Bemerkung 1.2.4 angegeben.
2. *Wie im euklidischen Fall wird $O(n,k)$ durch die Spiegelungen an den Hyperebenen erzeugt.*

Definition 1.2.3. *Mit ξ^k sei der von $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ aufgespannte maximal zeitartige und mit η^r der maximal raumartige Unterraum des $\mathbb{R}^{n,k}$ orthogonal zu ξ^k bezeichnet.*

Dann läßt sich jede lineare Abbildung $f : \eta^r \oplus \xi^k \to \eta^r \oplus \xi^k$ *als*

$$f = \begin{pmatrix} f_s & f_1 \\ f_2 & f_t \end{pmatrix}$$

darstellen. Der Endomorphismus f *heißt*

1. *zeitartig orientierungserhaltend, falls* $f_t : \xi^k \to \xi^k$ *orientierungserhaltend ist.*
2. *raumartig orientierungserhaltend, falls* $f_s : \eta^r \to \eta^r$ *orientierungserhaltend ist.*

Bemerkung 1.2.4. $O(n,k)$ *besteht aus vier Zusammenhangskomponenten, die mit*

$$\begin{aligned} O_{++}(n,k) &:= \{f \in O(n,k) \mid det(f_t) > 0 \text{ und } det(f_s) > 0\}, \\ O_{-+}(n,k) &:= \{f \in O(n,k) \mid det(f_t) > 0 \text{ und } det(f_s) < 0\}, \\ O_{+-}(n,k) &:= \{f \in O(n,k) \mid det(f_t) < 0 \text{ und } det(f_s) > 0\} \\ \text{und } O_{--}(n,k) &:= \{f \in O(n,k) \mid det(f_t) < 0 \text{ und } det(f_s) < 0\} \end{aligned}$$

bezeichnet werden. Weiterhin seien

$$\begin{aligned} SO(n,k) &:= O_{++}(n,k) \cup O_{--}(n,k), \\ O_t(n,k) &:= O_{++} \cup O_{-+}(n,k) \\ \text{und } O_s(n,k) &:= O_{++} \cup O_{+-}(n,k) \end{aligned}$$

definiert. $O_{++}(n,k)$ *und* $O_{--}(n,k)$ *sind die beiden Zusammenhangskomponenten von* $SO(n,k)$*. Die Zusammenhangskomponente der Einheit in* $SO(n,k)$ *sei mit* $SO_+(n,k) = O_{++}(n,k)$ *bezeichnet.* $O_t(n,k)$ *erhält die zeitliche und* $O_s(n,k)$ *die räumliche Orientierung.*

Es werden nun maximal kompakte Untergruppen von $O(n,k)$ und $SO(n,k)$ angegeben.

Bemerkung 1.2.5. *Für* $k \in \{1, n-1\}$ *lassen sich* $O(n-1)$ *in* $O(n,k)$ *und* $SO(n-1)$ *in* $SO(n,k)$ *einbetten. Im Fall* $k = 1$ *ist eine Einbettung durch* $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *gegeben. Für* $1 < k < n-1$ *lassen sich auf ähnliche Art die Untergruppen* $O(r) \times O(k)$ *in* $O(n,k)$ *und* $SO(r) \times SO(k)$ *in* $SO_+(n,k)$ *einbetten, für* $A \in O(r)$ *und* $B \in O(k)$ *gilt beispielsweise:*

$$(A,B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in O(n,k).$$

$SO(r) \times SO(k)$ *und* $O(r) \times O(k)$ *sind maximal kompakte Untergruppen von* $SO(n,k)$ *und* $O(n,k)$.

Definition 1.2.6. *Die Hyperbelschale* H_k^{n-1} *und die Sphäre* S_k^{n-1} *des* $\mathbb{R}^{n,k}$ *sind durch*

$$\begin{aligned} H_k^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^{n,k} \mid \langle x,x \rangle_{n,k} = -1\} \\ \text{und } S_k^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^{n,k} \mid \langle x,x \rangle_{n,k} = 1\} \end{aligned}$$

definiert. Die $Pin(n,k)$- und $Spin(n,k)$-Gruppe sind nun durch

$$Pin(n,k) := \{x_1 \cdots x_l \mid x_j \in H_k^{n-1} \cup S_k^{n-1} \text{ und } l \in \mathbb{N}\} \subset Cl_{n,k}$$
$$\text{und } Spin(n,k) := \{x_1 \cdots x_{2l} \mid x_j \in H_k^{n-1} \cup S_k^{n-1} \text{ und } l \in \mathbb{N}\} \subset Cl_{n,k}^0$$

gegeben. Statt $Pin(n,0)$ und $Spin(n,0)$ wird auch die Notation $Pin(n)$ und $Spin(n)$ verwandt.

Bemerkung 1.2.7.

1. *$Pin(n,k)$ und $Spin(n,k)$ sind tatsächlich Gruppen bezüglich der Algebrenmultiplikation. Das Inverse x^{-1} von $x \in H_k^{n-1} \cup S_k^{n-1}$ ist $-\frac{1}{\langle x,x\rangle_{n,k}}x$.*
2. *Ist $u \in Pin(n,k)$, so seien*

$$deg(u) := \begin{cases} 0, & \text{für } u \in Cl_{n,k}^0 \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\text{und } s(u) := \begin{cases} 0, & \begin{array}{l}\text{falls } u \text{ eine gerade Anzahl von} \\ \quad \text{Elementen aus } S_k^{n-1} \text{ enthält}\end{array} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Für $0 < k < n$ mit $k \neq 1$ und $n \neq 2$ läßt sich $Pin(n,k)$ in folgende disjunkte und zusammenhängende Teilmengen zerlegen:

$$\begin{aligned} Pin_{++}(n,k) &:= \{u \in Pin(n,k) \mid s(u) = 0 \text{ und } deg(u) = 0\}, \\ Pin_{+-}(n,k) &:= \{u \in Pin(n,k) \mid s(u) = 1 \text{ und } deg(u) = 1\}, \\ Pin_{-+}(n,k) &:= \{u \in Pin(n,k) \mid s(u) = 0 \text{ und } deg(u) = 1\} \\ \text{und } Pin_{--}(n,k) &:= \{u \in Pin(n,k) \mid s(u) = 1 \text{ und } deg(u) = 0\} \end{aligned}$$

Die Gruppe $Pin(2,1)$ läßt sich entsprechend zerlegen, die so definierten Teilmengen sind aber nicht zusammenhängend.
Weiterhin seien

$$\begin{aligned} Spin_+(n,k) &:= Pin_{++}(n,k), \\ Pin_t(n,k) &:= Pin_{++}(n,k) \cup Pin_{+-}(n,k) \\ \text{und } Pin_s(n,k) &:= Pin_{++}(n,k) \cup Pin_{-+}(n,k) \end{aligned}$$

definiert.

Lemma 1.2.8. *Sei $x \in H_k^{n-1} \cup S_k^{n-1}$. Dann liegt das Bild der Abbildung $\lambda(x) : \mathbb{R}^{n,k} \to Cl_{n,k}$ mit $y \mapsto -xyx^{-1}$ in $\mathbb{R}^{n,k}$. Die Spiegelung s_x an $x^\perp$ entspricht der Abbildung $\lambda(x)$.*

Beweis. Seien $x \in H_k^{n-1} \cup S_k^{n-1}$ und $\epsilon(x) = sgn(\langle x,x\rangle_{n,k})$. Dann ist $x^{-1} = -\epsilon(x)x$ und $\lambda(x)(y) = \epsilon(x)xyx$. Ist $y = \alpha x + \hat{x}$ mit $\hat{x} \in x^\perp$ gegeben, dann ergibt sich $\lambda(x)(y) = \epsilon(x)xx + \epsilon(x)x\hat{x}x$. Daraus folgt $\lambda(x)(y) = -\alpha x + \hat{x} = s_x(y)$. ☐

Definition 1.2.9. *Die Darstellung* $\lambda : Pin(n,k) \longrightarrow O(n,k)$ *mit dem Darstellungsraum* $\mathbb{R}^{n,k}$ *ist für alle* $y \in \mathbb{R}^{n,k}$ *durch* $u \longmapsto \lambda(u)$ *mit* $\lambda(u)(y) = (-1)^{deg(u)} uyu^{-1}$ *gegeben.*

Bemerkung 1.2.10. *Es seien* $a, b \in \{+, -\}$. *Dann gilt*

1. *Ist* $u = x_1 \dots x_l \in Pin(n,k)$, *so folgt*
$$\lambda(u)y = (-1)^l x_1 \dots x_l y x_l^{-1} \dots x_1^{-1} = s_{x_1} \circ \dots \circ s_{x_l}.$$
Der Gruppenhomomorphismus λ *ist surjektiv und bildet* Pin_{ab} *nach* O_{ab} *ab.*
2. *Der Homomorphismus* λ *ist eine zweifache Überlagerung mit Kern* $\{\pm 1\} \in Pin(n,k)$, *die genau dann universell ist, wenn* $n \geq 3$ *und* $k \in \{0, n\}$ *oder* $n \geq 4$ *und* $k \in \{1, n-1\}$ *gilt.*
3. *Die Liegruppe* $Pin(n,k)$ *ist für* $k \notin \{0, n\}$ *nicht kompakt.*

Definition 1.2.11. *Nach Wahl einer orthonormalen Basis* $\{e_i\}$ *von* $\mathbb{R}^{n,k}$ *sind die Untergruppen*

$$K := \left\{ y_1 \cdot \ldots \cdot y_p \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_q \;\middle|\; \begin{array}{c} x_i \in S_k^{n-1} \cap span\{e_1, \dots e_r\} \\ y_i \in H_k^{n-1} \cap span\{e_{r+1}, \dots e_n\} \\ p, q \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

von $Pin(n,k)$ *und*

$$K_0 := \left\{ y_1 \cdot \ldots \cdot y_{2p} \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2q} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_i \in S_k^{n-1} \cap span\{e_1, \dots e_r\} \\ y_i \in H_k^{n-1} \cap span\{e_{r+1}, \dots e_n\} \\ p, q \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

von $Spin_+(n,k)$ *definiert.*

Die Untergruppen K und K_0 sind maximal kompakt.

1.3. **Existenz semiriemannscher Mannigfaltigkeiten und deren Orientierbarkeitstypen.**

Auf einer glatten Mannigfaltigkeit M^n existiert stets eine riemannsche Metrik. Demgegenüber ist bekannt, daß eine nicht ausgeartete Metrik g vom Index k nur dann existiert, wenn ein Teilbündel der Dimension k des Tangentialbündels TM existiert. Dies wird als erstes bewiesen und hat zur Folge, daß auf einer semiriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{n,k}, g)$ das Tangentialbündel in die g-orthogonale Whitneysumme eines raumartigen Teilbündels η und eines zeitartigen Teilbündels ξ zerfällt. Ein Teilbündel heißt dabei raumartig (zeitartig), falls für alle $m \in M$ jeder Vektor aus der Faser des Teilbündels über m als Tangentialvektor in TM bezüglich der auf M gegebenen Metrik g raumartig (zeitartig) ist. Je nach Orientierbarkeit dieser Teilbündel lassen sich verschiedene Orientierbarkeitsbegriffe einer semiriemannschen Mannigfaltigkeit einführen. Diese Orientierbarkeitsbegriffe sind eng mit der Existenz gewisser Reduktionen des Repèrebündels von M und dem verschwinden bestimmter Stiefel-Whitney-Klassen verbunden. Ein Beweis dieser Aussage findet sich beispielsweise in [Bau81]. Die Formulierung in der Sprache der Stiefel-Whitney-Klassen wird in Abschnitt 1.6 benötigt, um Kriterien für die Existenz anderer Reduktionen herleiten zu können. Zur allgemeinen Theorie der charakteristischen Klassen und Stiefel-Whitney-Klassen sei auf [MS74] verwiesen.

Nach Wahl einer g-orthogonalen Zerlegung in raum- und zeitartige Teilbündel von TM läßt sich der semiriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{n,k}, g)$ eine riemannsche Metrik zuordnen. Ein ungelöstes Problem ist, ob die Vollständigkeit dieser assoziierten riemannschen Struktur bezüglich einer Wahl die Vollständigkeit der riemannschen Struktur bezüglich jeder anderen g-orthogonalen Zerlegung in raum- und zeitartige Teilbündel von TM impliziert. Die beiden letzten Lemmata liefern lokal gültige Vergleiche riemannscher Metriken, die von verschiedenen Zerlegungen abgeleitet sind. Ist die betrachtete Mannigfaltigkeit parallelisierbar, so sind die Formeln auch global gültig. In der abschließenden Bemerkung werden Beispielklassen parallelisierbarer semiriemannscher Mannigfaltigkeiten angegeben, auf denen die Fragestellung weiter untersucht werden kann. Dazu zählen die vierdimensionalen Spin-Lorentzmannigfaltigkeiten, die durchaus von physikalischem Interesse sind.

Im Beweis des nächsten Satzes wird die bekannte Tatsache verwandt, daß sich jedes G-Hauptfaserbündel über einem CW-Komplex auf eine in G maximal kompakte Untergruppe K reduzieren läßt.

Satz 1.3.1. *Auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n existiert genau dann eine semiriemannsche Metrik vom Index k, wenn ein k-dimensionales Teilbündel ξ^k von TM existiert.*

Beweis.
„⇒“ : Angenommen g ist eine Metrik vom Index k auf M, dann reduziert sich das Repèrebündel $L(M)$, das ein $GL(n,k)$-Hauptfaserbündel ist, auf $O(n,k)$. Sei $(P, \pi_P, M; O(n,k))$ diese Reduktion, es gelte also:

$$P = \bigsqcup_{m \in M} \left\{ (m, s_1, \ldots, s_n) \mid \{s_i\} \text{ ist } g\text{-orthonormale Basis in } T_m M \right\}.$$

Für $r := n - k$ sei $K = O(r) \times O(k)$ eine maximal kompakte Untergruppe von $O(n,k)$. Dann läßt sich das $O(n,k)$-Bündel P auf ein K-Bündel $(P_\xi, \pi_{P_\xi}, M; K)$ reduzieren. Die Faser über einem $m \in M$ ist dabei ein n-Tupel von Vektoren, wobei $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) \in O(r) \times O(k)$ die von den ersten r und den letzten k Vektoren aufgespannten Unterräume invarant läßt. Die Elemente $A \in O(r)$ und $B \in O(k)$ wirken dann durch die Einbettung $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{smallmatrix}\right)$ beziehungsweise $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ auf den Fasern von P_ξ. Zusammenfassend gilt somit:

$$\begin{aligned} TM &\cong L(M) \times_{GL(n,k)} \mathbb{R}^n \cong P \times_{O(n,k)} \mathbb{R}^n \\ &\cong P_\xi \times_K \mathbb{R}^n = P_\xi \times_K (\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^k) \\ &\cong (P_\xi \times_{O(r)} \mathbb{R}^r) \oplus (P_\xi \times_{O(k)} \mathbb{R}^k) \\ &\cong \eta^r \oplus \xi^k. \end{aligned}$$

„⇐“ : Seien ξ^k ein k-dimensionales Teilbündel des Tangentialbündels TM, r_M eine der stets existierenden riemannschen Metriken auf M^n und $r = n - k$. Dann ist ein r_M-orthogonales Teilbündel η^r der Dimension r in TM zu ξ^k durch Wahl des direkten Komplementes von ξ^k_m in $T_m M$ wohldefiniert. Eine indefinite Metrik vom Index k läßt sich durch die bilineare Fortsetzung von:

$$g_{|\xi \times \xi} := -r_{M|\xi \times \xi}, \qquad g_{|\xi \times \eta} := 0 \qquad \text{und} \qquad g_{|\eta \times \eta} := -r_{M|\eta \times \eta}$$

definieren. □

Das folgende Korollar ist beim Beweis der Rückrichtung des letzten Satzes mitbewiesen worden. Die Maximalität besagt in diesem Zusammenhang, daß keine raum- oder zeitartigen Teilbündel $\xi \subsetneq \xi'$ und $\eta \subsetneq \eta'$ von TM gefunden werden können, so daß $\xi' \oplus \eta = TM$ oder $\xi \oplus \eta'$ gilt.

Korollar 1.3.2. *Ist $(M^{n,k}, g)$ eine semiriemannsche Mannigfaltigkeit vom Index k, so existiert eine direkte Zerlegung in g-orthogonale maximal zeit- und maximal raumartige Unterbündel ξ^k und η^r von TM.*

Definition 1.3.3. *Die semiriemannsche Mannigfaltigkeit $(M^{n,k}, g)$ mit der Zerlegung des Tangentialbündels in maximal zeitartiges Unterbündel ξ^k und dazu g-orthogonales maximal raumartiges Komplement η^r heißt*

1. *zeitorientierbar, falls ξ^k orientierbar ist,*
2. *raumorientierbar, falls η^r orientierbar ist,*
3. *raum- und zeitartig orientierbar, falls ξ^k und η^r orientierbar sind,*
4. *orientierbar, falls TM orientierbar ist.*

Satz 1.3.4. *Es gibt folgende Kriterien für die Orientierbarkeitsbegriffe von $(M^{n,k}, g)$:*

1. $(M^{n,k}, g)$ *ist zeitorientierbar.*
   $\iff$ *Die erste Stiefel-Whitney-Klasse* $w_1(\xi^k)$ *verschwindet.*
   $\iff$ $(P, \pi_P, M; O(n,k))$ *läßt sich auf ein* $O_t(n,k)$*-Hauptfaserbündel mit Totalraum* $\widetilde{P}$ *reduzieren.*
2. $(M^{n,k}, g)$ *ist raumorientierbar.*
   $\iff$ *Die erste Stiefel-Whitney-Klasse* $w_1(\eta^r)$ *verschwindet.*
   $\iff$ $(P, \pi_P, M; O(n,k))$ *läßt sich auf ein* $O_s(n,k)$*-Hauptfaserbündel mit Totalraum* $\widetilde{P}$ *reduzieren.*
3. $(M^{n,k}, g)$ *ist raum- und zeitorientierbar.*
   $\iff$ *Die Stiefel-Whitney-Klassen* $w_1(\xi^k)$ *und* $w_1(\eta^r)$*verschwinden.*
   $\iff$ $(P, \pi_P, M; O(n,k))$ *läßt sich auf ein* $SO_+(n,k)$*-Hauptfaserbündel mit Totalraum* $\widetilde{P}$ *reduzieren.*
4. $(M^{n,k}, g)$ *ist orientierbar.*
   $\iff$ *Die erste Stiefel-Whitney-Klasse* $w_1(M)$ *verschwindet.*
   $\iff$ $(P, \pi_P, M; O(n,k))$ *läßt sich auf ein* $SO(n,k)$*-Hauptfaserbündel mit Totalraum* $\widetilde{P}$ *reduzieren.*
5. $(M^{n,k}, g)$ *ist nicht orientierbar.*
   $\iff$ *Der Totalraum des Hauptfaserbündels* $(P, \pi_P, M; O(n,k))$ *ist zusammenhängend.*

Beweis. Die Aussagen über die Stiefel-Whitney-Klassen sind bekannte Kriterien für die Orientierbarkeit von Vektorbündeln. Die Existenz der Reduktionen ist gerade Satz 0.51 in [Bau81]. □

Bemerkung 1.3.5.

1. *Die Totalräume* $\widetilde{P}$ *der ersten vier Punkte und der Totalraum* P *des fünften Punktes aus Satz 1.3.4 sind zusammenhängend, falls der entsprechende Orientierbarkeitsbegriff der maximale für* M *ist. Daher werden die zugehörigen Bündel dann auch die „zusammenhängenden Repèrebündel" von* $M^{n,k}$ *genannt.*
2. *Die Raum- und Zeitorientierbarkeit einer raum- und zeitartig orientierbaren Mannigfaltigkeit ist unabhängig von der Wahl eines maximal zeitartigen Unterbündels* ξ.

Definition 1.3.6. *Zu jedem maximal zeitartigen Unterbündel* ξ^k *von* $(M^{n,k}, g)$ *existiert nach Korollar 1.3.2 ein punktweise* g*-orthogonales maximal raumartiges Unterbündel* η^r*, so daß auf* M *eine riemannsche Metrik* r_ξ *durch*

$$r_{\xi|\xi\times\xi} := -g_{|\xi\times\xi}, \qquad r_{\xi|\xi\times\eta} := 0 \qquad \text{und} \qquad r_{\xi|\eta\times\eta} := g_{|\eta\times\eta}$$

und bilinearer Fortsetzung definiert werden kann.

Bemerkung 1.3.7.

1. *Die zu einer semiriemannschen Mannigfaltigkeit* $(M^{n,k}, g)$ *assoziierten riemannschen Metriken* r_ξ *sind abhängig von der Wahl des*

maximal zeitartigen Unterbündels ξ. Die riemannsche Metrik ist unabhängig von der in in jeder Faser ξ_m und η_m gewählten Basis.

2. *Die Identität $\vartheta(X) \cdot X = -r_\xi(X, X)$ gilt für jedes beliebige Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dabei bezeichnet ϑ die Spiegelung an dem von den raumartigen Basisvektoren aufgespannten Unterraum eines jeden Tangentialraumes. Diese Formel ist somit abhängig von der gewälten Zerlegung $\eta \oplus \xi$ des Tangentialbündels.*

Die beiden folgenden Probleme sind ungelöst:

Problem 1.3.8. *Sei $(M^{n,k}, g)$ eine semiriemannsche Mannigfaltigkeit.*

1. *Welche Bedingungen müssen an die Geometrie von M gestellt werden, damit ein maximal zeitartiges Unterbündel ξ von TM existiert, so daß die Mannigfaltigkeit M bezüglich der riemannschen Metrik r_ξ vollständig ist?*
2. *Sei ξ ein maximal zeitartiges Unterbündel von TM, so daß die riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, r_ξ) vollständig ist. Ist dann $(M^n, r_{\xi'})$ für ein beliebiges maximal zeitartiges Unterbündel ξ' von TM ebenfalls vollständig?*

Lemma 1.3.9. *Seien ξ und $\hat{\xi}$ maximal zeitartige Unterbündel des Tangentialbündels TM der semiriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{n,k}, g)$. Die g-orthogonalen Komplemente seien mit η und $\hat{\eta}$ und die zugehörigen Projektionen von TM auf die Unterbündel mit pr_ξ, $pr_{\hat{\xi}}$, pr_η und $pr_{\hat{\eta}}$ bezeichnet. Für die Vektorfelder X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt dann*

1. $r_\xi(X, Y) = g(X, Y) - 2g(X, pr_\xi(Y))$,
2. $r_{\hat{\xi}}(X, Y) = r_\xi(X, Y) + 2g(X, pr_\xi(Y)) - 2g(X, pr_{\hat{\xi}}(Y))$,
3. $r_{\hat{\xi}}(X, Y) = r_\xi(X, Y) + 2g(pr_{\hat{\eta}}(X), pr_\xi(Y)) - 2g(pr_{\hat{\xi}}(X), pr_\eta(Y))$.

Beweis. Die erste Behauptung wird durch Nachrechnen bewiesen:

$$\begin{aligned} r_\xi(X, Y) &= g(pr_\eta(X), pr_\eta(Y)) - g(pr_\xi(X), pr_\xi(Y)) \\ &= g(X, pr_\eta(Y)) - g(pr_\xi(X), Y) \\ &= g(X, Y) - g(X, pr_\xi(Y)) - g(pr_\xi(X), Y) \\ &= g(X, Y) - g(X, pr_\xi(Y)) - g(X, pr_\xi(Y)) \\ &= g(X, Y) - 2g(X, pr_\xi(Y)) \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt durch Einsetzen der gerade gezeigten Gleichung in die entsprechende von $r_{\hat{\xi}}$. Die dritte Behauptung ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} r_{\hat{\xi}}(X, Y) &= r_\xi(X, Y) + 2g(X, pr_\xi(Y)) - 2g(X, pr_{\hat{\xi}}(Y)) \\ &= r_\xi(X, Y) + 2\left(g(pr_{\hat{\eta}}(X), pr_\xi(Y)) + g(pr_{\hat{\xi}}(X), pr_\xi(Y))\right) \\ &\qquad\qquad - 2\left(g(pr_{\hat{\xi}}(X), pr_\xi(Y)) - g(pr_{\hat{\xi}}(X), pr_\eta(Y))\right) \\ &= r_\xi(X, Y) + 2g(pr_{\hat{\eta}}(X), pr_\xi(Y)) - 2g(pr_{\hat{\xi}}(X), pr_\eta(Y)). \end{aligned}$$

□

Lemma 1.3.10. *Es sei $(M^{n,k}, g)$ eine n-dimensionale semiriemannsche Mannigfaltigkeit mit zwei g-orthogonalen maximal raum- und zeitartigen Zerlegungen $TM = \xi \oplus \eta = \hat{\xi} \oplus \hat{\eta}$ gegeben. Ferner seien $\{e_i\}$ und $\{\hat{e}_i\}$ zwei auf der offenen Umgebung U gemäß dieser Zerlgungen g-orthonormale Repère. Für Vektorfelder, die lokal auf U durch $X = \sum \lambda_i e_i = \sum \hat{\lambda}_i \hat{e}_i$ und $Y = \sum \mu_i e_i = \sum \hat{\mu}_i \hat{e}_i$ gegeben sind, gilt dann*

$$r_{\hat{\xi}}(X,Y) = r_\xi(X,Y) + 2\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i\mu_i - 2\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=r+1}^{n} \lambda_i\mu_j g(e_i,\hat{e}_k)g(e_j,\hat{e}_k).$$

Beweis. Auf Grund der zweiten Formel von Lemma 1.3.9 gilt:

$$\begin{aligned}
r_{\hat{\xi}}(X,Y) &= r_\xi(X,Y) + 2g(X, \sum_{j=r+1}^{n} \mu_j e_j) - 2g(X, \sum_{k=r+1}^{n} \mu_k \hat{e}_k) \\
&= r_\xi(X,Y) + 2\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i\mu_i - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(e_i, \sum_{k=r+1}^{n} \hat{\mu}_k \hat{e}_k) \\
&= r_\xi(X,Y) + 2\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i\mu_i - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{k=r+1}^{n} \hat{\mu}_k g(e_i,\hat{e}_k) \\
&= r_\xi(X,Y) + 2\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i\mu_i - 2\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=r+1}^{n} \lambda_i\mu_j g(e_j,\hat{e}_k)g(e_i,\hat{e}_k).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.3.11. *Mit Hilfe der in Lemma 1.3.10 hergeleiteten Formel zum Vergleich verschiedener assoziierter riemannscher Metriken, können die in Problem 1.3.8 formulierten Fragen weiter untersucht werden. Die lokal gültige Formel ist offenbar auf parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten global gültig. Neben den wohlbekannten Beispielen der drei- und siebendimensionalen Sphären S^3 und S^7 sind auch alle zweidimensionalen raum- und zeitorientierbaren Lorentzmannigfaltigkeiten parallelisierbar, da die Raum- und Zeitorientierbarkeit in diesem Fall die Existenz eines globalen raumartigen und eines globalen zeitartigen nirgendwo verschwindenden Vektorfeldes impliziert, die punktweise orthonormal sind. Beispiele hierfür sind die später behandelten rechteckigen flachen Tori der Dimension zwei, sowie andere Produkträume einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit mit den reellen Zahlen oder der eindimensionalen Sphäre.*

Darüber hinaus besagt ein in [Ger68] *und* [Ger70] *bewiesener Satz, daß jede nicht kompakte vierdimensionale raum- und zeitartig orientierbare Lorentzmannigfaltigkeit $M^{4,1}$, die eine Spinstruktur zuäßt, notwendig parallelisierbar ist. Damit stehen beispielsweise die Schwarzschild-Lösung und Robertson-Walker-Räume zur weiteren Untersuchung bereit.*

1.4. **Darstellung der $Pin(n,k)$-Untergruppen, Spinormodule und Skalarprodukte.**

Die Realisierung der Cliffordalgebren $Cl_{n,k}$ als Matrizenalgebren in Abschnitt 1.1 liefert eine treue Darstellung aller Untergruppen von $Pin(n,k)$ auf komplexen Vektorräumen. Da komplexe Vektorräume stets ein hermitesches Skalarprodukt tragen, kann ein solches auch auf den Darstellungsräumen eingeführt werden. Bezüglich diesem wird dann eine bestimmte Orthonormalbasis gewählt. Die so eingeführten Begriffe stimmen im riemannschen Fall mit den in [BFGK91] definierten überein. Spätestens seit [Bau81] ist bekannt, daß das positiv definite Skalarprodukt auf den Darstellungsräumen für $Cl_{n,k}$ mit $0 \neq k \neq n$ verhältnismäßig schlechte Invarianzeigenschaften besitzt. Daher werden zwei indefinte hermitesche Produkte auf den Darstellungsräumen betrachtet. Das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_b$ ist im wesentlichen das in Abschnitt 1.5 von [Bau81] eingeführte. benutzte, alle dort für $\langle\ ,\ \rangle_b$ geführten Beweise lassen sich problemlos auf $\langle\ ,\ \rangle_a$ übertragen. Schließlich sei bemerkt, daß in Definition 1.4.3 die Cliffordmultiplikation von Vektoren von $\mathbb{R}^{n,k}$ mit Vektoren aus dem Darstellungsraum definiert wird.

Bemerkung 1.4.1. *Die natürliche Darstellung durch Matrizenmultiplikation von $O(n,k)$ mit Darstellungsraum $\mathbb{R}^{n,k}$ liefert durch Vorschalten von λ eine Darstellung der $Pin(n,k)$-Gruppe. Diese hat jedoch einen gravierenden Nachteil: Sie ist nicht treu, da der Kern von λ genau 1 und -1 enthält. Diese Beobachtung gilt natürlich auch für jede Untergruppe $\widetilde{G}(n,k)$ von $Pin(n,k)$, die 1 und -1 enthält. Eine treue Darstellung $\kappa_{\widetilde{G}(n,k)} : \widetilde{G}(n,k) \longrightarrow GL(\Delta_{n,k})$ ist auf Grund der Inklusionen und des Isomorphismus*

$$\widetilde{G}(n,k) \subset Pin(n,k) \subset Cl_{n,k} \xrightarrow{\cong} End(\mathbb{C}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$$

aus Abschnitt 1.1 gegeben.

Definition 1.4.2. *Die Darstellung $\kappa_{\widetilde{G}(n,k)} : \widetilde{G}(n,k) \longrightarrow GL(\Delta_{n,k})$ aus Abschnitt 1.1 heißt Spinordarstellung. Als Spinormodul wird der Darstellungsraum $\Delta_{n,k} = \mathbb{C}^{2^m}$ mit $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ bezeichnet.*

Ist n ungerade, so gilt nach Abschnitt 1.1, daß $Cl^c_{n,k}$ isomorph zu $\mathbb{C}^{2^m} \oplus \mathbb{C}^{2^m}$ ist. Mittels der dort beschriebenen Projektion auf die zweite Komponente existiert eine zu $\kappa_{\widetilde{G}(n,k)}$ äquivalente Darstellung, die mit $\hat{\kappa}_{\widetilde{G}(n,k)}$ bezeichnet wird. Der zugehörige Darstellungsraum wird mit $\hat{\Delta}_{n,k}$ bezeichnet. Anstelle von $\kappa_{\widetilde{G}(n,k)}$ wird meist nur κ geschrieben.

Definition 1.4.3. *Wegen der Inklusion $\mathbb{R}^{n,k} \subset Cl_{n,k}$ kann die Cliffordmultiplikation $\mu : \mathbb{R}^{n,k} \times \Delta_{n,k} \longrightarrow \Delta_{n,k}$ von Vektoren mit Spinoren durch die Festsetzung $(x,v) \longmapsto \kappa(x)(v) =: x \cdot v$ definiert werden.*

Lemma 1.4.4. *Die Cliffordmultiplikation μ ist ein gradierter Homomorphismus der $Pin(n,k)$-Darstellungen λ auf $\mathbb{R}^n$ und κ auf $\Delta_{n,k}$. Der* *gradierte Homomorphismus ist ein Homomorphismus, wenn der Definitionsbereich auf $Spin(n,k)$ eingeschränkt wird.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen, in Bemerkung 1.2.7 wurde die Funktion $deg : Pin(n,k) \to \{\pm 1\}$ definiert:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\big(\lambda(a)(x), \kappa(a)(v)\big)\Big) &= \mu\Big(((-1)^{deg(a)} axa^{-1}, \kappa(a)(v))\Big) \\
&= \kappa((-1)^{deg(a)} axa^{-1})\big(\kappa(a)(v)\big) \\
&= (-1)^{deg(a)} \kappa(axa^{-1}a)(v) \\
&= (-1)^{deg(a)} \big(\kappa(a) \circ \kappa(x)\big)(v) \\
&= (-1)^{deg(a)} \kappa(a)(\mu(x,v)).
\end{aligned}$$

□

Definition 1.4.5. *Auf dem Spinormodul $\Delta_{n,k}$ wird das positiv definite Standardskalarprodukt des $\mathbb{C}^{2^m}$ durch $(v,w)_\Delta = \sum_{i=1}^{2^m} v_i \overline{w}_i$ definiert.*

Bemerkung 1.4.6. *Im Spinormodul $\Delta_{n,k}$ werden nun für $n \geq 2$ spezielle Basen gewählt: Für $1 \leq l \leq m$ und $\nu_l \in \{\pm 1\}$ sei*

$$u(\nu_1, \dots, \nu_m) := \bigotimes_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\nu_l i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2^m} = \Delta_{n,k}$$

definiert.

1. $n = 2m,\ m \in \mathbb{N}$*:*
   Die Darstellung $\kappa_{Spin(2m,k)}$ hat die beiden invarianten Unterräume Δ^+ und Δ^-, die den Eigenräumen der Wirkung von $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$ auf $\Delta_{n,k}$ zu den Eigenwerten i^{m+k} und $-i^{m+k}$ entsprechen. Diese Unteräume werden positive beziehungsweise negative Weylspinoren genannt. Bezüglich $(\ ,\ )_\Delta$ ist $\{u(\nu_1, \dots, \nu_m) | \prod_{l=1}^m \nu_l = 1\}$ eine orthonormale Basis von Δ^+ und $\{u(\nu_1, \dots, \nu_m) | \prod_{l=1}^m \nu_l = -1\}$ eine von Δ^-. Die Darstellungen $\Delta^\pm$ sind irreduzible $Spin(2m,k)$-Darstellungen.
2. $n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}:$
   Wegen $\Delta_{2m,k} = \Delta_{2m+1,k}$ ist $\{u(\nu_1, \dots, \nu_m) | \prod_{l=1}^m \nu_l = \pm 1\}$ eine Orthonormalbasis von $\Delta_{2m+1,k}$. Die $Spin(2m+1,k)$-Darstellung $\Delta_{2m+1,k}$ ist irreduzibel.

Insbesondere gilt für diese Basis $U_1 u(\pm 1) = iu(\mp 1)$, $U_2 u(\pm 1) = \pm u(\mp 1)$ und $Tu(\pm 1) = \mp u(\pm 1)$.

Satz 1.4.7.

1. *Für $x \in \mathbb{R}^{n,k}$ und $v, w \in \Delta_{n,k}$ gilt $(x \cdot v, w)_\Delta + (v, \vartheta(x) \cdot w)_\Delta = 0$, wobei $\vartheta : \mathbb{R}^{n,k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n,k}$ die Spiegelung an der von den raumartigen Basiselementen aufgespannten Ebene bezeichnet. In den Spezialfällen $k = 0$ und $k = n$ gilt $\vartheta = \mathrm{Id}$ und $\vartheta = -\mathrm{Id}$.*
2. *Das Skalarprodukt $(\ ,\ )_\Delta$ ist nur für $k = 0$ und $k = n$ invariant unter der Wirkung von $Spin(n,k)$.*

3. *Das positiv definite Skalarprodukt* $(\ ,\ )_\Delta$ *ist invariant unter der Wirkung der maximal kompakten Untergruppe* K *von* $Pin(n,k)$.
4. *Für* $0 \neq k \neq n$ *existiert weder ein* $Spin(n,k)$*-invariantes Skalarprodukt noch ein* $Spin_+(n,k)$*-invariantes positiv definites Skalarprodukt auf* $\Delta_{n,k}$.

Beweis.

1. Nach Lemma 1.1.7 gilt $\kappa(e_i)^\perp = -\epsilon_i\overline{\kappa}(e_i)$. Für raumartige e_i folgt
$$\begin{aligned}(e_i \cdot v, w)_\Delta &= (\kappa(e_i)(v))^\perp\overline{w} = v^\perp\kappa(e_i)^\perp(\overline{w}) = -v^\perp\overline{\kappa(e_i)}(\overline{w})\\ &= -(v, e_i \cdot w)_\Delta,\end{aligned}$$
während für alle zeitartigen Basisvektoren e_i
$$\begin{aligned}(e_i \cdot v, w)_\Delta &= (\kappa(e_i)(v))^\perp\overline{w} = v^\perp\kappa(e_i)^\perp(\overline{w}) = v^\perp\overline{\kappa(e_i)}(\overline{w})\\ &= (v, e_i \cdot w)_\Delta\end{aligned}$$
gilt. Mit der Darstellung $x = \sum x_i e_i$ folgt die Behauptung.
2. Nach Defintion 1.2.6 läßt sich jedes Element $a \in Spin(n,k)$ als Produkt einer geraden Anzahl von Vektoren des $\mathbb{R}^{n,k}$ schreiben. Die Behauptung folgt nun durch wiederholte Anwendung der ersten Behauptung.
3. Sei $a = y_1 \cdot \ldots \cdot y_p \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_q \in K$ gemäß Definition 1.2.11 der maximal kompakten Untergruppe K von $Pin(n,k)$ beliebig gewählt. Wiederholte Anwendung der ersten Behauptung liefert
$$\begin{aligned}(a \cdot v, a \cdot w)_\Delta &= (-1)^q(v, x_q \cdot \ldots \cdot x_1 \cdot y_p \cdot \ldots \cdot y_1 \cdot a \cdot w)_\Delta\\ &= (-1)^q\left(\prod_{i=1}^p \langle y_i, y_i\rangle_{n,k}\right)\left(\prod_{i=1}^q -\langle x_i, x_i\rangle_{n,k}\right)(v,w)_\Delta\\ &= (-1)^q \cdot 1 \cdot (-1)^q(v,w)_\Delta\\ &= (v,w)_\Delta.\end{aligned}$$
4. Angenommen $B : \Delta_{n,k} \times \Delta_{n,k} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist ein $Spin(n,k)$-invariantes Skalarprodukt. Für $e_i \cdot e_j \in Spin(n,k)$ mit $i \leq r < j$ folgt aus der ersten Behauptung für alle $v, w \in \Delta_{n,k}$:
$$B(e_i \cdot e_j \cdot v, w) + B(v, e_i \cdot e_j \cdot w) = 0.$$
Mit $a \in Spin_+(n,k)$ ergibt sich $e_i \cdot e_j \cdot a \in Pin_{--}(n,k) \subset Spin(n,k)$. Das impliziert:
$$\begin{aligned}B(v,w) &= B(e_i \cdot e_j \cdot a \cdot v, e_i \cdot e_j \cdot a \cdot w)\\ &= -B(a \cdot v, e_i \cdot e_j \cdot e_i \cdot e_j \cdot a \cdot w)\\ &= -B(a \cdot v, a \cdot w)\\ &= -B(v,w).\end{aligned}$$
Somit muß $B \equiv 0$ gelten.
Ist B ein $Spin_+(n,k)$-invariantes positiv definites Skalarprodukt,

so gilt für $i \leq r < j$ und $v \in \Delta_{n,k}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq B(e_i \cdot e_j \cdot v, e_i \cdot e_j \cdot v) \\ &= -B(v, e_i \cdot e_j \cdot e_i \cdot e_j \cdot v) \\ &= -B(v, v). \end{aligned}$$

Das widerspricht der positiven Definitheit von B.

$\square$

Bemerkung 1.4.8. *Das positiv definite Skalarprodukt auf dem Spinormodul ist insbesondere invariant unter der Wirkung der maximal kompakten Untergruppe K_0 von $Spin_+(n,k)$, jedoch nicht invariant unter der Gruppenwirkung von $Spin_+(n,k)$.*

Definition 1.4.9. *In $Cl^c_{n,k}$ seien die Elemente*

$$a := i^{\frac{r(r+1)}{2}} e_1 \cdot \ldots \cdot e_r \qquad \text{und} \qquad b := i^{\frac{k(k-1)}{2}} e_{r+1} \cdot \ldots \cdot e_n$$

definiert. Dei Elemente a und $b \in Cl(\mathbb{R}^{n,k}) \otimes \mathbb{C}$ entsprechen einer Zerlegung des $\mathbb{R}^{n,k}$ in maximal zeit- und raumartige Unterräume.

Lemma 1.4.10. *Für $\gamma \in \{a, b\}$ gelten folgende Identitäten:*

1. $\gamma^2 = 1$
2. $ab = (-1)^{r \cdot k} ba$
3. *Für $x \in \mathbb{R}^{n,k}$ gilt $a \cdot x = (-1)^{r-1} \vartheta(x) \cdot a$ und $b \cdot x = (-1)^k \vartheta(x) \cdot b$.*
4. *γ kommutiert mit allen Elementen aus der maximal kompakten Untergruppe K_0 von $Spin_+(n,k)$.*
5. *Für alle v, $w \in \Delta_{n,k}$ gilt $(\gamma \cdot v, w)_\Delta = (v, \gamma \cdot w)_\Delta$.*
6. *γ wirkt unitär auf $(\Delta_{n,k}, (\ ,\ )_\Delta)$.*

Beweis. Die Aussagen werden durch Anwenden der Vertauschungsregeln in der Cliffordalgebra bewiesen. Zusätzlich wird für die vierte Behauptung die Zerlegung eines Elementes aus der maximal kompkten Untergruppe K_0 gemäß Definition 1.2.11 und für die fünfte Behauptung wird mehrfach die erste Behauptung aus 1.4.7 benötigt.

Die sechste Behauptung folgt aus der ersten und fünften. $\square$

Definition 1.4.11. *Auf dem Spinormodul $\Delta_{n,k}$ werden die beiden hermiteschen Bilinearformen*

$$\langle v, w \rangle_{a,\Delta} := (a \cdot v, w)_\Delta \qquad \text{und} \qquad \langle v, w \rangle_{b,\Delta} := (b \cdot v, w)_\Delta$$

definiert.

Satz 1.4.12. *Für $\gamma \in \{a, b\}$ gilt:*

1. *$\langle\ ,\ \rangle_{\gamma,\Delta}$ ist ein indefinites Skalarprodukt vom Index 2^{m-1}.*
2. *Es seien $x \in \mathbb{R}^{n,k}$ und $v, w \in \Delta_{n,k}$. Dann gilt:*
   $\langle x \cdot v, w \rangle_{a,\Delta} + (-1)^{r-1} \langle v, x \cdot w \rangle_{a,\Delta} = 0$
   $\langle x \cdot v, w \rangle_{b,\Delta} + (-1)^{k} \langle v, x \cdot w \rangle_{b,\Delta} = 0$
3. *$\langle\ ,\ \rangle_{\gamma,\Delta}$ ist $Spin_+(n,k)$-invariant.*

Beweis.

1. Die Matrix $\kappa_{Cl_{n,k}}(\gamma)$ ist regulär und hat 2^{m-1} positive und 2^{m-1} negative Eigenwerte. Mit der fünften Behauptung aus Lemma 1.4.10 folgt $\overline{\langle v, w \rangle}_{\gamma,\Delta} = \langle w, v \rangle_{\gamma,\Delta}$. Damit folgt, daß $\langle\ ,\ \rangle_{\gamma,\Delta}$ ein indefintes Skalarprodukt von Index 2^{m-1} ist.
2. Mit Satz 1.4.7 und Lemma 1.4.10 ergibt sich beispielsweise im Fall $\gamma = a$:
$$\begin{aligned} \langle x \cdot v, w \rangle_{a,\Delta} &= (a \cdot \cdot v, w)_\Delta = (-1)^{r-1}(\vartheta(x) \cdot a \cdot v, w)_\Delta \\ &= (-1)^{r-1}(a \cdot v, \vartheta(\vartheta(x)) \cdot w)_\Delta \\ &= (-1)^{r-1}\langle v, x \cdot w \rangle_{a,\Delta} \end{aligned}$$
Der Fall $\gamma = b$ wird analog bewiesen.
3. Für $c \in Spin_+(n,k)$ ergibt nun sich die Invarianzeigenschaft des indefiniten Skalarprodukts gegen die $Spin_+(n,k)$-Gruppenwirkung durch Abzählen der Vorzeichen.

$\square$

1.5. **Diracoperatoren auf Diracbündeln.**
Die in diesem Abschnitt beschriebenen Diracbündel sind das allgemeine Umfeld, im dem Diracoperatoren definiert werden. Im riemannschen Fall werden sie beispielsweise in [LM89] beschrieben. Einer Mannigfaltigkeit, die eine in Abschnitt 1.6 definierte Spinstruktur trägt, läßt sich ein Diracbündel zuordnen. Dies wird in Bemerkung 1.6.9 getan. Abschließend wird das Hauptsymbol des Diracoperators berechnet. Daran ist zu erkennen, daß der Operator auf riemannschen Mannigfaltigkeiten elliptisch ist, während er für $0 < k < n$ nicht elliptisch ist. Weiterhin folgt aus dem Hauptsymbol, daß der Diracoperator ein verallgemeinerter Laplaceoperator ist. Somit existiert stets eine Weitzenböckformel, die den Diracoperator mit dem Bochner-Laplace-Operator vergleicht. Auf Spinmannigfaltigkeiten wird die Weitzenböckformel in der Regel Lichnerowiczformel genannt. Eine Weitzenböckformel wird im weiteren Verlauf nicht benötigt.

Definition 1.5.1. *Es sei $(M^{n,k}, g)$ eine semiriemannsche Mannigfaltigkeit vom Index k. Jedem Tangentialraum (T_mM, g_m) wird die Cliffordalgebra $Cl(T_mM, g_m)$ zugeordnet. Unter $Cl(M, g)$ ist im folgenden die disjunkte Vereinigung $\coprod_{m\in M} Cl(T_mM, g_m)$ zu verstehen. $Cl(M, g)$ ist ein lokal-triviales Faserbündel mit dem Fasertyp $Cl_{n,k}$ und heißt Cliffordbündel.*

Definition 1.5.2. *Es sei E ein reelles oder komplexes Vektorbündel über der semiriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{n,k}, g)$ mit einem fasernweise definierten Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und einer kovarianten Ableitung $\nabla^E : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ gegeben.*
Ein Diracbündel ist ein Quadrupel $(E, \langle\ ,\ \rangle, \nabla^E, \mu)$, für das gilt:

1. *∇^E ist metrisch bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$.*
   Für jedes $m \in M$, alle $\varphi, \psi \in \Gamma(E)$ sowie alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt
   $$X(\langle\varphi, \psi\rangle)(m) = \langle\nabla^E_X\varphi, \psi\rangle(m) + \langle\varphi, \nabla^E_X\psi\rangle(m).$$
2. *$Cl(M, g)$ wirkt von links auf E fasertreu und glatt.*
   Für $m \in M$ existieren Funktionen $\mu_m : Cl(T_mM, g_m)\times E_m \to E_m$, so daß $\mu : \Gamma(Cl(M, g) \otimes E) \longrightarrow \Gamma(E)$ mit $\mu(a \otimes e) =: a \cdot e$ fasernweise durch $(a \cdot e)(m) := \mu_m(a, e)$ definiert wird. μ heißt auch Cliffordmultiplikation.
3. *Für alle $m \in M$, $X \in T_mM$ und $e, \hat{e} \in E_m$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:*
   $$\langle X \cdot e, \hat{e}\rangle + \langle e, X \cdot \hat{e}\rangle = 0 \qquad \textit{oder} \qquad \langle X \cdot e, \hat{e}\rangle - \langle e, X \cdot \hat{e}\rangle = 0.$$
4. *Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi \in \Gamma(E)$ gilt*
   $$\nabla^E_Y(X \cdot \varphi) = (\nabla^{LC}_Y X) \cdot \varphi + X \cdot \nabla^E_Y\varphi.$$
   Dabei bezeichnet ∇^{LC} den Levi-Civita-Zusammenhang von M.

Definition 1.5.3. *Es sei $(E, \langle\ ,\ \rangle_E, \nabla^E, \mu)$ ein Cliffordbündel. Der Diracoperator D dieses Bündels ist ein Differentialoperator erster Ordnung, der durch die Hintereinanderausführung von kovarianter Ableitung und Cliffordmultilikation definiert ist:*

$$D : \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^E} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{g} \Gamma(TM \otimes E) \xrightarrow{\mu} \Gamma(E).$$

Bemerkung 1.5.4.

1. *Die Abbildung $\Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{g} \Gamma(TM \otimes E)$ ist durch die von der Metrik auf M induzierten Identifikation von T^*M mit TM gegeben. Die zu einem Vektor X definierte duale Form ist durch $\omega_X(Y) := g(X, Y)$ gegeben, während der zu einem Kovektor ω assoziierte duale Vektor X_ω durch $\omega(Y) = g(X_\omega, Y)$ definiert ist. Im Fall einer glatten Funktion f auf M ist der duale Vektor von $\mathrm{d}f$ gerade* $\mathrm{grad}(f)$.
2. *Bezüglich eines lokalen g-orthonormalen Repères $\{s_i\}$ gilt für glatte Schnitte φ im Bündel E*
$$D\varphi = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i s_i \cdot \nabla^E_{s_i}\varphi.$$
3. *Für $f \in C^\infty(M)$ und $\varphi \in \Gamma(E)$ gilt $D(f\varphi) = \mathrm{grad}(f) \cdot \varphi + f \cdot D\varphi$.*

Eine wichtige Größe, die einem Differentialoperator P der Ordnung k zwischen glatten Schnitten der Vektorbündel E und F über M zugeordnet werden kann, ist sein Hauptsymbol. Zunächst sei an die Definition des Hauptsymbols $\sigma(P)$ erinnert. Es ist durch

$$\sigma(P)(m, \omega)(e) := \frac{1}{k!} P(f^k s)(m)$$

gegeben. Dabei sind $m \in M$, $(m, \omega) \in T^*_m M$, $e \in E_m$, $s \in \Gamma(E)$ mit $s(m) = e$ und $f \in C^\infty(M)$ mit $f(m) = 0$ und $\mathrm{d}f_m = \omega$ gewählt.

Das Hauptsymbol des Diracoperators $\sigma(D) \in \Gamma(Hom(\pi^*E, \pi^*E))$ ist für $(t, \omega) \in (\pi^*E)_m$ Cliffordmultiplikation mit dem zu ω dualen Vektor:

$$\sigma(D)(t, \omega)(w) = X_\omega \cdot w.$$

Dies folgt aus der im dritten Punkt angegebenen Formel von Bemerkung 1.5.4, denn mit den eben eingeführten Bezeichnungen gilt

$$\sigma(D)(m, \omega)(e) = \frac{1}{1!} D(f^1 s)(m) = \mathrm{grad}(f) \cdot \varphi + f \cdot D\varphi = X_\omega \cdot \varphi + 0.$$

Korollar 1.5.5.

1. *Der Diracoperator ist auf riemannschen Mannigfaltigkeiten D ein elliptischer Differentialoperator. Ist die Metrik hingegen indefinit, so ist er nicht elliptisch.*
2. *Der quadrierte Diracoperator D^2 ist ein verallgemeinerter Laplaceoperator.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Tatsache, daß die Cliffordmultiplikation auf riemannschen Mannigfaltigkeiten ein Isomorphismus ist. Für $0 < k < n$ ist die Cliffordmultiplikation jedoch nicht injektiv. Für die zweite Behauptung muß überprüft werden, ob das Hauptsymbol metrisch ist: $\sigma(D^2)(t,\omega)(w) = X_\omega \cdot X_\omega \cdot w = -g(v,v)w$. $\square$

1.6. **Spinstrukturen und ihre Konsequenz.**

Je nach Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit $(M^{n,k}, g)$ läßt sich das Repèrebündel auf eine Untergruppe von $O(n,k)$ maximal reduzieren. Mit der in Abschnitt 1.2 beschriebenen zweifachen Überlagerungsabbildung λ kann das zusammenhängende Repèrebündel auf eine Untergruppe $\widetilde{G}$ von $Pin(n,k)$ reduziert werden. Eine solche Reduktion wird $\widetilde{G}$-Struktur genannt. Max Karoubi gab in [Kar68] zwei Ausdrücke in gewissen Stiefel-Whitney-Klassen an, deren verschwinden äquivalent zur Existenz einer $Pin(n,k)$-Struktur beziehungsweise einer $Spin(n,k)$-Struktur ist. Aus dem Kriterium für die Existenz einer $Pin(n,k)$-Struktur lassen sich mit den Aussagen aus Satz 1.3.4 Bedingungen für die Existenz von $\widetilde{G}$-Strukturen herleiten. Dies geschieht in Satz 1.6.3.

Einer $\widetilde{G}$-Struktur läßt sich weiter mittels der Darstellung κ ein assoziiertes komplexes Vektorbündel zuordnen. Dieses „Spinorbündel“ ist im Fall $\widetilde{G} = Spin_+(n,k)$ ein Diracbündel.

Definition 1.6.1. *Es seien $\xi = (P, \pi_P, M; G)$ das zusammenhängende Repèrebündel von $(M^{n,k}, g)$ und $\widetilde{G}$ das Urbild von G unter der zweifachen Überlagerungsabbildung λ aus 1.2.9. Dann ist G je nach Orientierbarkeitstyp eine der Gruppen $O(n,k)$, $O_t(n,k)$, $O_s(n,k)$, $SO(n.k)$ oder $SO_+(n,k)$ und $\widetilde{G}$ entsprechend $Pin(n,k)$, $Pin_t(n,k)$, $Pin_s(n,k)$, $Spin(n,k)$ oder $Spin_+(n,k)$.*

Unter einer $\widetilde{G}$-Struktur ist die λ-Reduktion des zusammenhängenn Repèrebündels zu verstehen.

Eine Mannigfaltigkeit, die eine $\widetilde{G}$-Struktur zuläßt, wird auch $\widetilde{G}$-Mannigfaltigkeit genannt. In den konkreten Fällen liegen also beispielsweise Pinstrukturen oder Pin_t-Mannigfaltigkeiten vor.

Bemerkung 1.6.2. *Es wird nun das Kriterium für die Existenz von $Pin(n,k)$- und $Spin(n,k)$-Strukturen endlichdimensionaler Vektorbündel V über parakompakten Räumen aus* [Kar68] *angegeben. In jeder Faser sei ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt oder eine quadratische Form gegeben. Das Vektorbündel $V = V^+ \oplus V^-$ sei derartig zerlegt, daß die quadratische Form auf V^+ positiv definit und auf V^- negativ definit ist. Es bezeichne ferner $w_i^\pm$ die i-te Stiefel-Whitney-Klasse von $V^\pm$. Das Kriterium für die Existenz einer $Pin(n,k)$-Struktur lautet*

$$w_2(M) + (w_1^-)^2 = w_2^+ + w_2^- + (w_1^-)^2 + w_1^- w_1^+ = 0.$$

Für die Existenz einer $Spin(n,k)$-Struktur muß

$$w_1(M) = w_1^+ + w_1^- = 0 \text{ und } w_2^+ + w_2^- = 0$$

erfüllt sein.

Satz 1.6.3. *Sei $(M^{n,k}, g)$ eine semiriemannsche Mannigfaltigkeit mit einer $\widetilde{G}$-Struktur und seien ξ und η maximal zeit- und raumartige und*

g-orthogonale Unterbündel des Tangentialbündels. Weiterhin bezeichnet w_i^- die i-te Stiefel-Whitney-Klasse von ξ und w_i^+ die von η. Dann gilt:

1. *Eine $\widetilde{G}$-Struktur impliziert stets die Existenz einer Pin-Struktur.*
2. $\widetilde{G} = Pin(n,k) \iff w_2^+ + w_2^- + (w_1^-)^2 + w_1^- w_1^+ = 0$
3. $\widetilde{G} = Pin_t(n,k) \iff w_1^- = 0 = w_2^+ + w_2^-$
4. $\widetilde{G} = Pin_s(n,k) \iff w_2^+ + w_2^- + (w_1^-)^2 = 0$ *und* $w_1^+ = 0$
5. $\widetilde{G} = Spin(n,k) \iff w_1(M) = w_1^- + w_1^+ = 0$ *und* $w_2^+ + w_2^- = 0$
6. $\widetilde{G} = Spin_+(n,k) \iff w_1^- = w_1^+ = 0$ *und* $w_2^+ + w_2^- = 0$

Beweis. Das $\widetilde{G}$-Hauptfaserbündel mit Totalraum Q läßt sich zu einem $Pin(n,k)$-Hauptfaserbündel mit Totalraum $Q \times_{\widetilde{G}} Pin(n,k)$ erweitern, da $\widetilde{G}$ eine Untergruppe von $Pin(n,k)$ ist.

Die zweite Behauptung ist einer der beiden von Karoubi bewiesenen Fälle.

Die zweite bis sechste Aussage ist nun eine Konsequenz aus den von Karoubi bewiesenen Kriterien für die Existenz von $Pin(n,k)$- und $Spin(n,k)$-Strukturen und den Angaben aus 1.3.4. Zunächst gilt nach der ersten Behauptung

$$w_2^+ + w_2^- + (w_1^-)^2 + w_1^- w_1^+ = 0.$$

Nach Satz 1.3.4 gilt im Fall $\widetilde{G} = Pin_t(n,k)$: $w_1^- = 0$. Damit folgt insbesondere $w_2^+ + w_2^- = 0$.
Im Fall $\widetilde{G} = Pin_s(n,k)$ gilt $w_1^+ = 0$. Damit folgt $w_2^+ + w_2^- + (w_1^-)^2 = 0$.
Gilt $\widetilde{G} = Spin(n,k)$, so gilt $w_1(M) = w_1^- + w_1^+ = 0$. Das bedeutet aber zusätzlich $w_2^+ + w_2^- = 0$.
Schließlich gilt im Fall $\widetilde{G} = Spin_+(n,k)$ nach Satz 1.3.4 $w_1^+ = 0 = w_1^-$. Damit ergibt sich $w_2^+ + w_2^- = 0$. □

Definition 1.6.4. *Zwei $\widetilde{G}$-Strukturen (Q,f) und $(\hat{Q},\hat{f})$ von $(M^{n,k},g)$ heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\Phi : Q \to \hat{Q}$ von $\widetilde{G}$-Hauptfaserbündeln gibt, so daß $\hat{f} \circ \Phi = f$ gilt. Die Menge aller Isomorphieklassen sei mit $\widetilde{G}(M^{n,k},g)$ und die Isomorphieklasse zu (Q,f) sei mit $[(Q,f)]$ bezeichnet.*

Bemerkung 1.6.5. *Die Isomorphieklassen von $Spin_+(n,k)$-Strukturen einer $Spin_+(n,k)$-Mannigfaltigkeit $(M^{n,k},g)$ lassen sich mit den Elementen von $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ identifizieren. Im riemannschen Fall ist dies beispielsweise von* [Mil63], [Mil65] *bewiesen worden. Ein Beweis findet sich auch in* [Fri97]. *Für den Fall $k \neq 0$ sei auf* [Bau81] *verwiesen.*

Definition 1.6.6. *Es sei $\xi = (P,\pi_P,M;G)$ das zusammenhängende Repèrebündel der semiriemannschen $\widetilde{G}$-Mannigfaltigkeit $(M^{n,k},g)$. Ferner sei (Q,f) eine fixierte $\widetilde{G}$-Struktur. Durch die $\widetilde{G}$-Darstellung $\kappa_{\widetilde{G}}$ auf $\Delta_{n,k}$ kann ein zur $\widetilde{G}$-Struktur (Q,f) assoziiertes Vektorbündel*

$$S := Q \times_{\widetilde{G}} \Delta_{n,k}$$

definiert werden. Dieses Vektorbündel heißt $\widetilde{G}$-Bündel von M zur $\widetilde{G}$-Struktur (Q, f).

Bemerkung 1.6.7.

1. *Im folgenden werden nur raum- und zeitartig orientierbare Mannigfaltigkeiten betrachtet. Es wird also nur der Fall $G = SO_+(n,k)$ mit $\widetilde{G} = Spin_+(n,k)$ untersucht. Die zugehörigen Objekte werden der Einfachheit halber als Spinstrukturen, Spinmannigfaltigkeiten und Spinorbündel bezeichnet. Die beschriebene Konstruktion läßt sich prinzipiell auch im Fall einer anderen Untergruppe G von $O(n,k)$ durchführen, dann müssen aber noch Gradierungen berücksichtigt werden, wie sie im Fall der Cliffordmultiplikation begegnet sind.*
2. *Zwei Elemente $[q,v]$, $[q',w] \in S_m$, der Faser in S über $m \in M$, sind genau dann gleich, wenn ein $g \in Spin_+(n,k)$ existiert, so daß die Identitäten $q = q'g$ und $v = \kappa_{Spin_+(n,k)}(g^{-1})(w)$ gelten. Auf Grund der transitiven Gruppenwirkung auf jeder einzelnen Faser kann für beliebige $[q,v]$, $[q',w] \in S_m$ stets $q = q'$ angenommen werden.*

   Für glatte Schnitte gilt Analoges. Die Schnitte φ, $\psi \in \Gamma(S)$ seien im folgenden stets so repräsentiert, daß $\varphi(m) = [q(m), v(m)]$ und $\psi(m) = [q(m), w(m)]$ gilt.
3. *Nach der Wahl einer Zerlegung von $TM = \eta^r \oplus \xi^k$ läßt sich das Spinorbündel S auf die maximal kompakte Untergruppe K_0 von $Spin_+(n,k)$ reduzieren. Diese Reduktion ist wie die Reduktion von TM auf die maximal kompakte Untergruppe $SO(r) \times SO(k)$ abhängig vom gewählten ξ und wird mit $S = Q_\xi \times_{K_0} \Delta_{n,k}$ bezeichnet. Q_ξ ist dabei das Urbild des auf $SO(r) \times SO(k)$ reduzierten Repèrebündels unter f.*

   Für alle folgenden Betrachtungen, die abhängig von einem gewählten ξ sind, sei stets das unter Berücksichtigung von ξ auf K_0 reduzierte Spinorbündel S betrachtet.

   Analog zur zweiten Bemerkung sind bei fixiertem ξ die Repräsentanten von Spinoren $[q,v]$, $[q',w] \in S_m$ grundsätzlich mit $q = q' \in (Q_\xi)_m$ gewählt.

   In lokalen Rechnungen mit Schnitten $\varphi = [q,v] \in \Gamma(S)$ und $\psi = [q',w] \in \Gamma(S)$ seien die Schnitte $q, q' \in \Gamma(Q_\xi)$ stets gleich gewählt.

Die letzte Bemerkung soll nun an Hand einer raum- und zeitartig orientierbaren Spin-Lorentzmannigfaltigkeit $(M^{n,1}, g)$ illustriert werden.

Beispiel 1.6.8. *Auf M existiert ein auf -1 normiertes globales Vektorfeld X, dessen Wahl eine Zerlegung des Tangentialbündels in maximal raum- und maximal zeitartige Unterbündel $\eta^{n-1} \oplus \xi^1$ impliziert, die g-orthogonal sind . Das $SO_+(n,1)$-Hauptfaserbündel P der positiv* *orientierten Orthonormalrepère auf M läßt sich nach Wahl des Vektorfeldes X zu einem $SO(n-1)$-Hauptfaserbündel P_ξ reduzieren. Das geschieht durch die Einschränkung auf Elemente in P, die in einer positiv orientierten Basis des Typs $\{e_1, \dots, e_{n-1}, X(p)\}$ von T_pM durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ repräsentiert werden, wobei $A \in SO(n-1)$ sei.*

Ist (Q, f) eine Spinstruktur auf M, so ist die Reduktion der Spinstruktur auf die maximal kompakte Untergruppe K_0 nach Wahl des Vektorfeldes X gerade $(Q_\xi, f_\xi) = (f^{-1}(P_\xi), f|_{f^{-1}(P_\xi)})$. Das reduzierte Spinorbündel ist dann $S = Q_\xi \times_{K_0} \Delta_{n,1}$.

Aus P_ξ kann P rekonstruiert werden, es gilt $P = P_\xi \times_{SO(n-1)} SO_+(n,1)$. Auch in diesem Fall ist die Wirkung von $A \in SO(n-1)$ durch die Einbettung $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

Bemerkung 1.6.9. *Die nachfolgenden Schritte geben einen Einblick in die Konstruktion des Cliffordbündels einer raum- und zeitartig orientierten semiriemannschen Spinmannigfaltigkeit $(M^{n,k}, g)$ mit fixierter Spinstruktur (Q, f). Der Levi-Civita-Zusammenhang auf M sei mit ∇^{LC} bezeichnet.*

- *$S := Q \times_{Spin_+(n,k)} \Delta_{n,k}$ ist das zu betrachtende Vektorbündel.*
- *Ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ findet sich folgendermaßen:*
  Es seien $m \in M$ und φ, $\psi \in \Gamma(S_\xi)$ fixiert. Wir setzen nun:

  $$(\varphi, \psi)_\xi(m) = ([q, v], [q, w])_\xi(m) := (v(m), w(m))_\Delta$$

  Dieses Skalarprodukt ist abhängig von einer gewählten Zerlegung des Tangentialbündels, da das Skalarprodukt $(\ ,\ )_\Delta$ lediglich invariant gegen die maximal kompakte Untergruppe K_0 ist. Fasernweise existieren zwei $Spin_+(n,k)$-invariante indefinite Skalarprodukte, die unabhängig von der gewählten Tangentialraumzerlegung sind:

  $$\langle\varphi, \psi\rangle_a(m) = \langle[q, v], [q, w]\rangle_a(m) := \langle v(m), w(m)\rangle_{a,\Delta},$$
  $$\langle\varphi, \psi\rangle_b(m) = \langle[q, v], [q, w]\rangle_b(m) := \langle v(m), w(m)\rangle_{b,\Delta}.$$

- *Definition der kovarianten Ableitung ∇^S:*
  Sei $\tilde{s} : U \to Q$ mit $s = f \circ \tilde{s} = (s_1, \dots, s_n)$ ein lokales $SO_+(n,k)$-Repère auf $U \subset M$, so daß $s_i = [s, e_i] \in TM_{|U}$ gilt. Dabei wird folgendende Identifizierung vorgenommen:

  $$TM_{|U} = P_{|U} \times_{SO_+(n,k)} \mathbb{R}^{n,k} = Q_{|U} \times_{Spin_+(n,k)} \mathbb{R}^{n,k}.$$

  Für einen lokalen oder globalen Schnitt $\varphi = [\tilde{s}, v]$ in S mit lokaler Darstellung auf U und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sei dann

  $$\nabla^S_X \varphi := X(\varphi) + \frac{1}{2} \sum_{k<l} \epsilon_k \epsilon_l g(\nabla^{LC}_X s_k, s_l) \cdot s_k \cdot s_l \cdot \varphi.$$

  Mit $X(\varphi)$ ist der Spinor $[\tilde{s}, X(v)]$ und mit $s_i \cdot \varphi$ der Spinor $[\tilde{s}_i, e_i \cdot v]$ bezeichnet.

- *Die Cliffordmultiplikation in* $(S, \nabla^S, \langle\ ,\ \rangle_\gamma^S)$*:*
  Auf Grund der Identifizierung $TM \cong Q \times_{Spin_+(n,k)} \mathbb{R}^n$ *sei die Abbildung* $\mu : TM \otimes S \longrightarrow S$ *durch*
  $$X \otimes \varphi = [q, x] \otimes [q, v] \longmapsto [q, \kappa_{Cl_{n,k}}(x)(v)] =: X \cdot \varphi$$
  definiert. Die Multiplikation sei auf $Cl(M, g)$ *geeignet fortgesetzt:*
  $$[q, x_1 \cdot \ldots \cdot x_t] \otimes [q, v] \longmapsto [q, \kappa_{Cln,k}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_t)(v)].$$
- *Schließlich sind für* $\gamma \in \{a, b\}$ *folgende Identitäten erfüllt:*
  1. ∇^S *ist metrisch bezüglich* $\langle\ ,\ \rangle_\gamma$
  2. *Für alle* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *und* φ*,* $\psi \in \Gamma(S)$ *gilt*
     $$\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle_a + (-1)^{r-1} \langle \varphi, X \cdot \psi \rangle_a = 0,$$
     $$\text{und } \langle X \cdot \varphi, \psi \rangle_b + (-1)^k \langle \varphi, X \cdot \psi \rangle_b = 0.$$
  3. *Für Vektorfelder* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *und einen Spinor* $\varphi \in \Gamma(S)$ *gilt* $\nabla_X^S (Y \cdot \varphi) = (\nabla_X^{LC} Y) \cdot \varphi + Y \cdot (\nabla_X^S \varphi)$.

Definition 1.6.10. *Es sei* $(M^{n,k}, g)$ *eine semiriemannsche Spinmannigfaltigkeit, die raum- und zeitartig orientierbar ist, und* (Q, f) *eine fixierte Spinstrukteur. Dann sind* $\mathcal{D}_a^{M^{n,k}} := (S, \langle\ ,\ \rangle_a, \nabla^S, \mu)$ *und* $\mathcal{D}_b^{M^{n,k}} := (S, \langle\ ,\ \rangle_b, \nabla^S, \mu)$ *zwei sich lediglich im indefinten Skalarprodukt unterscheidende Diracbündel.*

1.7. **Skalarprodukte in Räumen der Spinorfelder.**
Auf dem Raum der Spinorfelder $\Gamma_c(S)$ mit kompaktem Träger im Innern von M lassen sich drei L^2-Skalarprodukte definieren: Eines der drei Skalarprodukte im Spinormodul wird fixiert und fasernweise auf zwei Spinoren angewandt. Anschließend wird über M integriert. Das positiv definite Skalarprodukt induziert auf den Schnitten eine Norm; die Vervollständigung von $\Gamma_c(S)$ wird mit $L^2_\xi(S)$ bezeichnet. Der Diracoperator mit Definitionsbereich $\Gamma_c(S)$ wird stets in diesem Raum betrachtet.

In Satz 1.7.11 wird untersucht, was bezüglich dieser Produkte die adjungierte Abbildung zur Cliffordmultiplikation mit einem Vektorfeld ist. Dies wird später benötigt, um nachzuweisen, das $i^{r-1}D$ beziehungsweise $i^k D$ symmetrische Operatoren bezüglich der indefiniten Skalarprodukte sind. Schließlich wird ein Skalarprodukt in $\Gamma_c(TM \otimes S)$ eingeführt, um im nächsten Kapitel nachweisen zu können, daß $L^2_\xi(S)$ ein Kreinraum ist. Die hier aufgeführten Beweisen finden sich für den Fall $\langle\ ,\ \rangle_b$ in Abschnitt 3.3.1 von [Bau81].

Definition 1.7.1. *Sei $(M^{n,k}, g)$ eine semiriemannsche Spinmannigfaltigkeit, die raum- und zeitartig orientierbar ist. Weiterhin seien eine Spinstruktur (Q, f) und ein maximal zeitartiges Unterbündel ξ von TM fest gewählt. Dann definieren a und b aus 1.4.9 die Homomorphismen $\mathcal{J}_a, \mathcal{J}_b : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S)$, indem sowohl a als auch b fasernweise wirkt. Für $\varphi = [q, v] \in \Gamma(S)$ gilt somit*

$$(\mathcal{J}_a(\varphi))(m) := [q(m), a \cdot v(m)] \quad \textit{und} \quad (\mathcal{J}_b(\varphi))(m) := [q(m), b \cdot v(m)].$$

Dabei bezeichnet q ein Schnitt im K_0-Hauptfaserbündel Q_ξ, das durch die Wahl von ξ durch Reduktion aus Q gebildet wird. Das assoziierte Vektorbündel S wird in diesem Kontext als $Q_\xi \times_{K_0} \Delta_{n,k}$ aufgefaßt.

Bemerkung 1.7.2. *Die Abbildungen $\mathcal{J}_a$ und $\mathcal{J}_b$ sind wohldefiniert, da a und b nach Lemma 1.4.10 mit allen Elementen aus der maximal kompakten Untergruppe K_0 von $Spin_+(n, k)$ kommutieren.*

Lemma 1.7.3.
1. $\mathcal{J}_a^2 = \mathcal{J}_b^2 = Id$
2. $\mathcal{J}_a \circ \mathcal{J}_b = (-1)^{k \cdot r} \mathcal{J}_b \circ \mathcal{J}_a$
3. *Für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi \in \Gamma(S)$ gilt:*

$$\mathcal{J}_a(X \cdot \varphi) = (-1)^{r-1} \vartheta(X) \cdot \mathcal{J}_a(\varphi),$$
$$\mathcal{J}_b(X \cdot \varphi) = (-1)^{k} \vartheta(X) \cdot \mathcal{J}_b(\varphi).$$

Beweis. Das Lemma 1.4.10 besagt, daß die Behauptungen fasernweise gelten. □

Lemma 1.7.4. *Der Differentialoperator nullter Ordnung $\mathcal{J}_\gamma$ hat $\mathcal{J}_\gamma$ als Hauptsymbol.*

Beweis. Als lineare Abbildung von $\Gamma(S)$ nach $\Gamma(S)$ ist $\mathcal{J}_\gamma$ ein Differentialoperator nullter Ordnung. Das mit der Projektion $\pi : T^*M \longrightarrow M$ zurückgezogene Spinorbündel sei mit π^*S bezeichnet. Weiterhin seien $(m, \omega) \in T^*M$, $\varphi_m \in S_m$, $\psi \in \Gamma(S)$ mit $\psi(m) = \varphi_m$ und $f \in C^\infty(M)$ mit $f(m) = 0$ und $\mathrm{d}\, f_m = \omega$. Dann gilt definitionsgemäß

$$\sigma(\mathcal{J}_\gamma)(m, \omega)(\varphi_m) = \frac{1}{0!}\mathcal{J}_\gamma(f^0\psi)(m) = \mathcal{J}_\gamma(\psi)(m).$$

□

Definition 1.7.5. *In dem Raum $\Gamma_c(S)$ der Spinorfelder mit kompaktem Träger im Inneren von M kann ein positiv definites hermitesches Skalarprodukt $(\ ,\ )_\xi$ eingeführt werden, indem für zwei Spinorfelder mit kompaktem Träger $\varphi(m) = [q_m, v_m]$ und $\psi(m) = [q_m, w_m]$ mit $q_m \in (Q_\xi)_m$*

$$(\varphi, \psi)_\xi := \int_M (\varphi(m), \psi(m))_{\xi,m} dM = \int_M (v_m, w_m)_\Delta dM$$

definiert wird.

Bemerkung 1.7.6.

1. *Das Skalarprodukt aus Definition 1.7.5 ist abhängig von einer gewählten Zerlegung des Tangentialbündels in maximal raum- und maximal zeitartige Unterbündel, da die positiv definiten Skalarprodukte $(\ ,\ )_\xi$ von der Zerlegung abhängig sind.*
2. *Die Abbildungen $\mathcal{J}_a$ und $\mathcal{J}_b$ sind bezüglich $(\ ,\ )_\xi$ unitär.*

Definition 1.7.7. *Auf $\Gamma_c(S)$ definiert $\| \varphi \|_\xi := \sqrt{(\varphi, \varphi)_\xi}$ eine Norm. Die Vervollständigung von $\Gamma_c(S)$ bezüglich dieser Norm $\| \ \|_\xi$ wird mit $L^2_\xi(S)$ bezeichnet.*

Bemerkung 1.7.8. *Da der Basisraum M von S als Mannigfaltigkeit eine abzählbare Basis offener Mengen besitzt, ist $L^2_\xi(S)$ ist ein separabler Hilbertraum.*

Definition 1.7.9. *Im Raum der Spinorfelder mit kompaktem Träger $\Gamma_c(S)$ können zwei indefinite innere hermitesche Produkte $\langle\ ,\ \rangle_a$ und $\langle\ ,\ \rangle_b$ eingeführt werden, indem für $\varphi = [q, v]$, $\psi = [q, w] \in \Gamma_c(S)$ und $\gamma \in \{a, b\}$*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\gamma := \int_M \langle v(m), w(m) \rangle_{\gamma,\Delta} dM$$

definiert wird.

Bemerkung 1.7.10. *Die beiden inneren hermiteschen Produkte aus Definition1.7.9 sind unabhängig von einer gewählten Zerlegung des Tangentialbündels. Insbesondere gelten die Identitäten*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_a = (\mathcal{J}_a(\varphi), \psi)_\xi \quad \text{und} \quad \langle \varphi, \psi \rangle_b = (\mathcal{J}_b(\varphi), \psi)_\xi$$

für Spinorfelder mit kompaktem Träger. Die beiden Produkte sind nicht ausgeartet, wie beispielsweise auf Seite 141 in [Bau81] *für $\langle\ ,\ \rangle_b$ gezeigt* *wurde. Der Beweis läßt sich problemlos auf den Fall $\gamma = a$ übertragen. Es liegen somit nicht ausgeartete indefinte hermitesche Skalarprodukte auf $\Gamma_c(S)$ vor.*

Lemma 1.7.11. *Für Spinorfelder φ, $\psi \in \Gamma_c(S)$ und jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt*

1. $(X \cdot \varphi, \psi)_\xi + (\varphi, \vartheta(X) \cdot \psi)_\xi = 0,$
2. $\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle_a + (-1)^{r-1} \langle \varphi, X \cdot \psi \rangle_a = 0,$
3. $\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle_b + (-1)^k \langle \varphi, X \cdot \psi \rangle_b = 0.$

Beweis. Für alle $m \in M$ gilt nach der ersten Behauptung aus Satz 1.4.7 punktweise:

$$\begin{aligned}(X \cdot \varphi, \psi)_\xi(m) &= (X(m) \cdot \varphi(m), \psi(m))_\xi \\ &= (\varphi(m), \vartheta(X(m)) \cdot \psi(m))_\xi \\ &= (\varphi, \vartheta(X) \cdot \psi)_\xi(m)\end{aligned}$$

Damit folgt die erste Behauptung. Die zweite und dritte folgen analog unter Anwendung der zweiten Aussage von Satz 1.4.12. $\square$

Definition 1.7.12. *Auf $\Gamma_c(TM \otimes S)$ wird durch*

$$(t \otimes \varphi, s \otimes \psi)_\xi^\otimes := \int_M r_\xi(t,s)(m) \cdot (\varphi, \psi)_\xi(m) dM$$

positiv definite hermitesche Bilinearform definert.

Definition 1.7.13. *Die von $(\ ,\ )_\xi^\otimes$ induzierte Norm sei mit $||\ ||_\xi^\otimes$ bezeichnet. Die Vervollständigung von $\Gamma_c(TM \otimes S)$ bezüglich der Norm $||\ ||_\xi^\otimes$ wird mit $L_\xi^2(TM \otimes S)$ bezeichnet.*

1.8. **Reelle und quaternionische Strukturen im Spinormodul und Spinorbündel.**

Andrè Lichnerowicz bewies 1964 in [Lic64] die Existenz einer rellen Struktur im Spinorbündel einer semiriemannschen Spinmannigfaltigkeit $M^{4,3}$, die mit dem Diracoperator kommutiert. In diesem Abschnitt werden reelle und quaternionische Strukturen im Spinorbündel einer allgemeinen semiriemannschen Spinmannigfaltigkeit $M^{n,k}$ konstruiert, die mit dem Diracoperator (anti-)kommutieren. Diese werden aus den reellen und quaternionischen Strukturen abgeleitet, die auf riemannschen Mannigfaltigkeiten existieren und beispielsweise in [Fri97] beschrieben werden. Durch fasernweise Festsetzung werden die Strukturen im Spinorbündel definiert.

In Abschnitt 2.5 werden diese Strukturen benutzt, um allgemeine Symmetrieeigenschaften der Spektralteile des Diracoperators auf semiriemannschen Mannigfaltigkeiten nachzuweisen. Besonders wichtig ist Satz 1.8.13, dort wird gezeigt, wie ${}_aS$ und ${}_bS$ mit dem Diracoperator vertauscht.

Definition 1.8.1. *Sei V ein komplexer Vektorraum.*

1. *Eine reelle Struktur auf V ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha : V \to V$ mit $\alpha^2 = \mathrm{Id}$ und $\alpha(iv) = -i\alpha(v)$ für alle $v \in V$.*
2. *Eine quaternionische Struktur auf V ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\beta : V \to V$ mit $\beta^2 = -\mathrm{Id}$ und $\beta(iv) = -i\beta(v)$ für alle $v \in V$.*

Satz 1.8.2.

1. *Für $n \equiv 0, 1 \mod 8$ existiert auf $\Delta_{n,0}$ eine reelle Struktur $s_{n,0}$, die mit der Cliffordmultiplikation antikommutiert, das heißt, daß $s_{n,0}(x \cdot u) = -x \cdot s_{n,0}(u)$ für $x \in \mathbb{R}^{n,0}$ und $u \in \Delta_{n,0}$ gilt.*
2. *Für $n \equiv 2, 3 \mod 8$ existiert auf $\Delta_{n,0}$ eine quaternionische Struktur $s_{n,0}$, die mit der Cliffordmultiplikation kommutiert.*
3. *Für $n \equiv 4, 5 \mod 8$ existiert auf $\Delta_{n,0}$ eine quaternionische Struktur $s_{n,0}$, die mit der Cliffordmultiplikation antikommutiert.*
4. *Für $n \equiv 6, 7 \mod 8$ existiert auf $\Delta_{n,0}$ eine reelle Struktur $s_{n,0}$, die mit der Cliffordmultiplikation kommutiert.*

Beweis. Die reelle beziehungsweise quaternionische Struktur $s_{n,0}$ auf $\Delta_{n,0}$ ist ein Tensorprodukt der reellen Struktur $\alpha(z_1, z_2) = (-\bar{z}_2, \bar{z}_1)$ und der quaternionischen Struktur $\beta(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, die auf $\mathbb{C}^2$ definiert sind. Die Tensorprodukte sind nach [Fri97], Seite 31ff, durch

1. $n = 8k, 8k+1$:
   Es gilt $\Delta_{n,0} = \bigotimes_{4k} \mathbb{C}^2$. Es sei $s_{n,0} := \bigotimes_{2k}(\alpha \otimes \beta)$.
2. $n = 8k+2, 8k+3$:
   Es gilt $\Delta_{n,0} = \bigotimes_{4k+1} \mathbb{C}^2$. Es sei $s_{n,0} := \alpha \bigotimes_{2k}(\beta \otimes \alpha)$.
3. $n = 8k+4, 8k+5$:
   Es gilt $\Delta_{n,0} = \bigotimes_{4k+2} \mathbb{C}^2$. Es sei $s_{n,0} := \bigotimes_{2k+1}(\alpha \otimes \beta)$.
4. $n = 8k+6, 8k+7$:
   Es gilt $\Delta_{n,0} = \bigotimes_{4k+3} \mathbb{C}^2$. Es sei $s_{n,0} := \alpha \bigotimes_{2k+1}(\beta \otimes \alpha)$.

gegeben. Die Eigenschaften werden durch direktes Nachrechnen bezüglich der in Bemerkung 1.4.6 gegebenen Basis von $\Delta_{n,0}$ verifiziert. $\square$

Eine äquivalente Umformulierung des Satzes ist

Korollar 1.8.3. *Es existiert eine Abbildung $s_{n,0} : \Delta_{n,0} \longrightarrow \Delta_{n,0}$, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in \Delta_{n,0}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

1. *Die Abbildung $s_{n,0}$ist konjugiert linear: $s_{n,0}(\lambda u) = \bar{\lambda} s_{n,0}(u)$,*
2. $s_{n,0}^2 = \begin{cases} \mathrm{Id}, & \textit{falls } n \equiv 0,1,6,7 \mod 8 \\ -\mathrm{Id}, & \textit{falls } n \equiv 2,3,4,5 \mod 8, \end{cases}$
3. $s_{n,0}(x \cdot u) = \begin{cases} -x \cdot s_{n,0}(u), & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ x \cdot s_{n,0}(u), & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4. \end{cases}$

Satz 1.8.4. *Auf $\Delta_{n,k}$ existiert die Abbildung $s_{n,k} : \Delta_{n,k} \longrightarrow \Delta_{n,k}$, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in \Delta_{n,k}$ und $x \in \mathbb{R}^{n,k}$ gilt:*

1. *Die Abbildung $s_{n,k}$ ist konjugiert linear: $s_{n,k}(\lambda u) = \bar{\lambda} s_{n,k}(u)$,*
2. $s_{n,k}^2 = \begin{cases} \mathrm{Id}, & \textit{falls } n \equiv 0,1,6,7 \mod 8 \\ -\mathrm{Id}, & \textit{falls } n \equiv 2,3,4,5 \mod 8, \end{cases}$
3. $s_{n,k}(x \cdot u) = \begin{cases} -\vartheta(x) \cdot s_{n,k}(u), & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ \vartheta(x) \cdot s_{n,k}(u), & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4. \end{cases}$

Dabei bezeichnet ϑ die Spiegelung an dem von $\{e_1, \dots, e_r\}$ aufgespannten maximal raumartigen Unterraum von $\mathbb{R}^{n,k}$

Beweis. Es sei $s_{n,k}(v) := s_{n,0}(v)$ für alle $v \in \Delta_{n,0}$ definiert. Offensichtlich gelten dann die ersten beiden Behauptungen. Um die dritte Behauptung zu beweisen, sei an die Realisierung der Cliffordalgebra in Abschnitt 1.1 als Matrizenalgebra erinnert. Die zu untersuchende Cliffordmultiplikation mit $x \in \mathbb{R}^{n,k}$ ist dann durch die Wirkung auf $\Delta_{n,k}$ gegeben. Der einzige Unterschied in der Realisierung der Matrizenalgebra zwischen dem positiv definiten und dem indefiniten Fall ist das Auftreten des Faktors $\tau_j = i$ für zeitartiges und $\tau_j = 1$ für raumartiges e_j. Da $s_{n,k}$ komplex konjugiert linear ist, folgen die Regeln für die Vertauschung mit der Cliffordmultiplikation. $\square$

In der Sprache von Satz 1.8.2 liest sich der letzte Satz als

Korollar 1.8.5.

1. *Für $n \equiv 0,1 \mod 8$ existiert auf $\Delta_{n,k}$ eine reelle Struktur $s_{n,k}$ für die $s_{n,k}(x \cdot u) = -\vartheta(x) \cdot s_{n,k}(u)$ gilt.*
2. *Für $n \equiv 2,3 \mod 8$ existiert auf $\Delta_{n,k}$ eine quaternionische Struktur $s_{n,k}$, für die $s_{n,k}(x \cdot u) = \vartheta(x) \cdot s_{n,k}(u)$ gilt.*
3. *Für $n \equiv 4,5 \mod 8$ existiert auf $\Delta_{n,k}$ eine quaternionische Struktur $s_{n,k}$, für die $s_{n,k}(x \cdot u) = -\vartheta(x) \cdot s_{n,k}(u)$ gilt.*
4. *Für $n \equiv 6,7 \mod 8$ existiert auf $\Delta_{n,k}$ eine reelle Struktur $s_{n,k}$ für die $s_{n,k}(x \cdot u) = \vartheta(x) \cdot s_{n,k}(u)$ gilt.*

Lemma 1.8.6.

1. $s_{n,k}$ *wirkt bezüglich des positiv definiten Skalarproduktes* $(\ ,\ )_\Delta$ *schiefunitär, das heißt, daß* $(s_{n,k}(u), s_{n,k}(v))_\Delta = (v,u)_\Delta$ *für beliebige* $u, v \in \Delta_{n,k}$ *gilt.*
2. $s_{n,k}$ *vertauscht mit der Wirkung der maximal kompakten Untergruppe* K_0 *von* $Spin_+(n,k)$.

Beweis.

1. Für die Basisvektoren $u(\nu)$ aus 1.4.6 gilt
$$\alpha(u(\nu)) = -i\nu \cdot u(-\nu) \qquad \text{und} \qquad \beta(u(\nu)) = u(-\nu).$$
Die reellen und quaternionischen Strukturen auf $\Delta_{n,k}$ bilden die $(\ ,\ )_\Delta$-orthonormale Basis $\{u(\nu_1, \dots, \nu_m)\}$ auf eine $(\ ,\ )_\Delta$-orthonormale Basis ab. Aus $s_{n,k}(\lambda u + \mu v) = \bar{\lambda} s_{n,k}(u) + \bar{\mu} s_{n,k}(v)$ und der Definition von $(\ ,\ )_\Delta$ folgt nun die Behauptung.
2. Ist $c \in K_0$ gemäß Definition 1.2.11 auf, so folgt die Behauptung mit Satz 1.8.4 und abzählen der Vorzeichen.

$\square$

Definition 1.8.7. *Auf dem Spinormodul* $\Delta_{n,k}$ *seien die beiden Abbildungen*

$$\begin{aligned} {}_a s_{n,k} : \Delta_{n,k} &\longrightarrow \Delta_{n,k} \\ u &\longmapsto s_{n,k}(a \cdot u) \end{aligned} \qquad \textit{und} \qquad \begin{aligned} {}_b s_{n,k} : \Delta_{n,k} &\longrightarrow \Delta_{n,k} \\ u &\longmapsto s_{n,k}(b \cdot u) \end{aligned}$$

definiert. Da aus dem Kontext die Dimension n *und der Index* k *gewöhnlich eindeutig bestimmbar sind, wird von nun an* s, ${}_a s$ *und* ${}_b s$ *statt* $s_{n,k}$, ${}_a s_{n,k}$ *und* ${}_b s_{n,k}$ *geschrieben, um die Notation zu vereinfachen.*

Lemma 1.8.8. *Für* $x \in \mathbb{R}^{n,k}$ *und* $u \in \Delta_{n,k}$ *gilt:*

1. *Die beiden Abbildungen* ${}_a s_{n,k}$ *und* ${}_b s_{n,k}$ *sind konjugiert linear, das heißt, daß sie* ${}_a s_{n,k}(\lambda u) = \bar{\lambda}\ {}_a s_{n,k}(u)$ *und* ${}_b s_{n,k}(\lambda u) = \bar{\lambda}\ {}_b s_{n,k}(u)$ *für* $\lambda \in \mathbb{C}$ *erfüllen.*
2. ${}_a s \circ s = \begin{cases} (-1)^r s \circ {}_a s, & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ s \circ {}_a s, & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$
3. ${}_b s \circ s = \begin{cases} s \circ {}_b s, & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^k s \circ {}_b s, & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$
4. ${}_a s^2 = \begin{cases} (-1)^r \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 8 \\ -\operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 8 \\ (-1)^{r+1} \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 4,5 \mod 8 \\ \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 6,7 \mod 8, \end{cases}$
5. ${}_b s^2 = \begin{cases} \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 8 \\ (-1)^{k+1} \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 8 \\ -\operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 4,5 \mod 8 \\ (-1)^k \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 6,7 \mod 8, \end{cases}$

6. $_a s(x\cdot u) = \begin{cases} (-1)^r x\cdot\ _a s(u), & \textit{falls } n\equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^{r-1} x\cdot\ _a s(u), & \textit{falls } n\equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$

7. $_b s(x\cdot u) = \begin{cases} (-1)^{k+1} x\cdot\ _b s(u), & \textit{falls } n\equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^{k} x\cdot\ _b s(u), & \textit{falls } n\equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$

Beweis. Die Behauptungen folgen direkt aus Satz 1.8.4, Lemma 1.4.10 und Abzählen der auftretenden Vorzeichen. □

Satz 1.8.9.

1. *Die Abbildungen $_a s$ und $_b s$ sind bezüglich des positiv definiten Skalarproduktes $(\ ,\ )_\Delta$ schiefunitär.*
2. *Sowohl $_a s$ als auch $_b s$ kommutieren mit der Gruppenwirkung von $Spin_+(n,k)$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Unitarität der Multiplikation mit a und b gemäß Lemma 1.4.10 und der Schiefunitarität von s. Die zweite Behauptung folgt aus den Vertauschungsregeln von $_a s$ und $_b s$ mit der Cliffordmultiplikation aus Lemma 1.8.8 und der Darstellung von Elementen der $Spin_+(n,k)$-Gruppe nach Bemerkung 1.2.7. □

Definition 1.8.10. *Die fasertreuen Abbildungen S, $_a S$ und $_b S$ auf dem Spinorbündel S sind durch die fasernweise Anwendung von s, $_a s$ und $_b s$ definiert.*

Bemerkung 1.8.11.

1. *Da s nur unter der Wirkung der maximal kompakten Untergruppe K_0 invariant ist, ist S erst nach Fixierung eines maximalen zeitartigen Unterbündels ξ wohldefiniert.*
2. *Die Abbildungen $_a S$ und $_b S$ sind es ohne eine solche Fixierung, da $_a s$ und $_b s$ unter der $Spin_+(n,k)$-Wirkung invariant sind.*

Lemma 1.8.12. *Für $X\in\mathfrak{X}(M)$ und $\varphi\in\Gamma(S)$ gilt:*

1. *Die drei Abbildungen S, $_a S$ und $_b S$ sind konjugiert linear:*

$$\begin{aligned} S(i\varphi) &= -iS(\varphi), \\ {}_a S(i\varphi) &= -i\ {}_a S(\varphi) \\ \textit{und } {}_b S(i\varphi) &= -i\ {}_b S(\varphi). \end{aligned}$$

2. $S^2 = \begin{cases} \mathrm{Id}, & \textit{falls } n\equiv 0,1,6,7 \mod 8 \\ -\mathrm{Id}, & \textit{falls } n\equiv 2,3,4,5 \mod 8, \end{cases}$

3. $_a S\circ S = \begin{cases} (-1)^r S\circ\ _a S, & \textit{falls } n\equiv 0,1 \mod 4 \\ S\circ\ _a S, & \textit{falls } n\equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$

4. $_b S\circ S = \begin{cases} S\circ\ _b S, & \textit{falls } n\equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^k S\circ\ _b S, & \textit{falls } n\equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$

5. $${}_aS^2 = \begin{cases} (-1)^r \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 8 \\ -\operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 8 \\ (-1)^{r+1} \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 4,5 \mod 8 \\ \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 6,7 \mod 8, \end{cases}$$
6. $${}_bS^2 = \begin{cases} \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 8 \\ (-1)^{k+1} \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 8 \\ -\operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 4,5 \mod 8 \\ (-1)^k \operatorname{Id}, & \textit{falls } n \equiv 6,7 \mod 8, \end{cases}$$
7. $$S(X \cdot \varphi) = \begin{cases} -\vartheta(X) \cdot S(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ \vartheta(X) \cdot S(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$$
8. $${}_aS(X \cdot \varphi) = \begin{cases} (-1)^r X \cdot {}_aS(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^{r-1} X \cdot {}_aS(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$$
9. $${}_bS(X \cdot \varphi) = \begin{cases} (-1)^{k+1} X \cdot {}_bS(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^k X \cdot {}_bS(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$$

Beweis. Die Behauptungen folgen direkt aus Satz 1.8.4 und Lemma 1.8.8. □

Die Vertauschungsrelationen von ${}_aS$ und ${}_bS$ mit dem Diracoperator in Punkt vier und fünf des folgenden Satzes werden in Abschnitt 2.5 benötigt, um Symmetrieeigenschaften des Spektrums vom Diracoperator nachzuweisen. Es sei bemerkt, daß die Vorzeichen im allgemeinen von den in [Bau94] angegebenen abweichen.

Satz 1.8.13. *Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi \in \Gamma(S)$ gilt:*

1. *${}_aS$, ${}_bS$ und S sind bezüglich dem positiv definiten Skalarprodukt schiefunitär.*
2. $\nabla^S_X({}_aS(\varphi)) = {}_aS(\nabla^S_X \varphi)$,
3. $\nabla^S_X({}_bS(\varphi)) = {}_bS(\nabla^S_X \varphi)$,
4. $$D \circ {}_aS(\varphi) = \begin{cases} (-1)^r \, {}_aS \circ D(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^{r-1} \, {}_aS \circ D(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$$
5. $$D \circ {}_bS(\varphi) = \begin{cases} (-1)^{k+1} \, {}_bS \circ D(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^k \, {}_bS \circ D(\varphi), & \textit{falls } n \equiv 2,3 \mod 4. \end{cases}$$

Beweis.

1. Zunächst gilt ${}_aS = S \circ \mathcal{J}_a$ und ${}_bS = S \circ \mathcal{J}_b$. Die Abbildung S ist schiefunitär, da s fasernweise schiefunitär ist. Die Behauptungen für ${}_aS$ und ${}_bS$ folgen nun aus der Tatsache, daß $\mathcal{J}_a$ und $\mathcal{J}_b$ unitär sind.
2. Die Behauptung wird in einer lokalen Trivialisierung $\varphi = [q, u(\nu)]$ mit $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ überprüft. Dabei wird die Notation aus Bemerkung 1.4.6 verwandt. Exemplarisch sei der Fall ${}_aS$ und $n \equiv 0,1$

mod 4 bewiesen.

$$
\begin{aligned}
{}_aS(\nabla^S_X\varphi) :=\ & {}_aS\Big(X(u(\epsilon)) + \frac{1}{2}\sum_{j<l}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla^{LC}_X s_k, s_l)s_k\cdot s_l\cdot\varphi\Big)\\
=\ & {}_aS\Big(0 + \frac{1}{2}\sum_{j<l}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla^{LC}_X s_k, s_l)s_k\cdot s_l\cdot\varphi\Big)\\
=\ & \frac{1}{2}\sum_{j<l}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla^{LC}_X s_k, s_l)\,{}_aS(s_k\cdot s_l\cdot\varphi)\\
=\ & \frac{1}{2}\sum_{j<l}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla^{LC}_X s_k, s_l)(-1)^r(-1)^r s_k\cdot s_l\cdot\ {}_aS(\varphi)\\
=\ & 0 + \frac{1}{2}\sum_{j<l}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla^{LC}_X s_k, s_l)s_k\cdot s_l\cdot\ {}_aS(\varphi)\\
=\ & X(a\cdot u(\epsilon))\\
& + \frac{1}{2}\sum_{j<l}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla^{LC}_X s_k, s_l)(-1)^r(-1)^r s_k\cdot s_l\cdot\ {}_aS(\varphi)\\
=\ & \nabla^S_X({}_aS(\varphi)).
\end{aligned}
$$

Die anderen Fälle werden analog bewiesen.

3. Die beiden letzten Formeln folgen aus den beiden vorhergehenden, den Vertauschungsregeln von ${}_\gamma S$ mit der Cliffordmultiplikation aus Lemma 1.8.12 und der lokalen Gestalt des Diracoperators, wie sie in Bemerkung 1.5.4 angegeben wurde. Beispielhaft sei der Fall $\gamma = a$ und $n \equiv 0 \mod 4$ vorgerechnet:

$$
\begin{aligned}
(D\circ\ {}_aS)(\varphi) &= \sum_{k=1}^n \epsilon_k e_k\cdot\nabla_{e_k}({}_aS(\varphi))\\
&= \sum_{k=1}^n \epsilon_k e_k\cdot\ {}_aS(\nabla_{e_k}(\varphi))\\
&= (-1)^r\sum_{k=1}^n \epsilon_k\ {}_aS(e_k\cdot\nabla_{e_k}(\varphi))\\
&= (-1)^r\ {}_aS(D(\varphi))
\end{aligned}
$$

□

2. Kreinräume und Spektraleigenschaften des Diracoperators

In diesem Kapitel werden Symmetrieeigenschaften des Diracoperators einer semiriemannschen Mannigfaltigkeit eingehender untersucht. Auf Grund der auftretenden indefiniten Metriken sind die geeigneten Funktionenräume keine Hilberträume sondern Kreinräume. Diese werden im zweiten Abschnitt eingeführt. Dort werden auch einige Resultate der Kreinraumtheorie zitiert. Um diese Resultate benutzen zu können, wird im anschließenden Abschnitt bewiesen, daß der Diracoperator mit $\Gamma_c(S)$ als Definitionsbereich wesentlich selbstadjungiert ist. Zusätzlich zu den so gewonnenen Symmetrien des Spektrums folgen aus den in Abschnitt 1.8 hergeleiteten reellen und quaternionischen Strukturen weitere Symmetrien. Sie werden im fünften Abschnitt benutzt, um die zusätzliche Symmetrien explizit anzugeben. Beispielsweise kann so gefolgert werden, daß in den Dimensionen $n \not\equiv 1 \mod 4$ das Restpektrum niemals auftritt. Beispiele für ein nicht verschwindendes Restspektrum in den Dimensionen $n \equiv 1 \mod 4$ sind bisher nicht bekannt.

Solange nicht explizit etwas anderes gefordert wird, soll $(M^{n,k}, g)$ immer eine raum- und zeitartig orientierbare semiriemannsche Spinmannigfaltigkeit mit einer vollständigen assoziierten riemannschen Struktur bezeichnen. Dabei sei stets eine orthogonale Zerlegung des Tangentialbündels TM in maximal raum- und zeitartige Unterbündel η und ξ gewählt, deren nach Definition 1.3.6 assoziierte riemannsche Struktur (M^n, r_ξ) vollständig ist.

Der Diracoperator D wird im Raum der L^2-Schnitte immer mit dem Definitionsbereich $\Gamma_c(S)$ betrachtet.

2.1. **Operatoren und deren Spektrum auf Hilberträumen.**
Die Intention dieses Abschnitts ist es, an Standardbegriffe aus der Funktionalanalysis zu erinnern und die benutzte Notation vorzustellen. Das abschließende Lemma zeigt, daß alle späteren Aussagen, die das Spektrum vom Abschluß des Diracoperators betreffen, auch für den Diracoperator selbst gültig sind.

Definition 2.1.1. *Es seien zwei Operatoren $S : dom(S) \longrightarrow \mathcal{H}$ und $T : dom(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ mit den Definitionsbereichen $dom(S)$ und $dom(T)$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$ gegeben.*

1. *Die Operatoren S und T heißen gleich, falls beide Definitionsbereiche übereinstimmen und $Tx = Sx$ für alle $x \in dom(T)$ gilt. Dieser Sachverhalt wird durch $S = T$ gekennzeichnet.*
2. *T wird Erweiterung von S genannt, falls $dom(S) \subset dom(T)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in dom(S)$ gilt. Hierfür wird auch $S \subset T$ geschrieben.*
3. *Der Operator T heißt abgeschlossen, wenn der Graph von T in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ bezüglich der Graphennorm $||(x,y)|| = (||x||^2 + ||y||^2)^{1/2}$ abgeschlossen ist. Unter dem Abschluß T^{cl} des Operators T wird der kleinste T erweiternde abgeschlossene Operator verstanden; dieser existiert nicht immer.*
4. *T heißt dicht definiert, falls $dom(T)$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt.*
5. *Der Operator T heißt symmetrisch oder formal selbstadjungiert, falls $(Tx, y) = (x, Ty)$ für alle $x, y \in dom(T)$ gilt.*
6. *Der Operator T wird zu S adjungiert genannt, wenn*
$$dom(T) = \{ y \in \mathcal{H} \mid x \mapsto (Sx, y) \text{ ist stetig auf } dom(S) \}$$
und $(Sx, y) = (x, Ty)$ für alle $x \in dom(S)$ und $y \in dom(T)$ gilt. Der zu T adjungierte Operator wird meist mit T^* bezeichnet.
7. *T heißt selbstadjungiert, falls $T = T^*$ gilt. T wird wesentlich selbstadjungiert genannt, falls T^{cl} selbstadjungiert ist.*
8. *T heißt normal (unitär), falls $TT^* = T^*T$ ($TT^* = T^*T = \mathrm{Id}$) gilt. Dabei ist $dom(ST) = \{x \in dom(T) \mid Tx \in dom(S)\}$ der Definitionsbereich von ST.*
9. *Unter der Resolventenmenge $\rho(T)$ wird die Menge*
$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} (\lambda \,\mathrm{Id} - T) : dom(T) \to \mathcal{H} \text{ ist bijektiv} \\ \text{und hat stetige Inverse auf } \mathcal{H} \end{array} \right\}$$
verstanden.
10. *Durch die Festsetzung $R_\lambda := (\lambda \,\mathrm{Id} - T)^{-1}$ wird die Resolventenabbildung $R : \rho(T) \to L(\mathcal{H})$ definiert. Die Menge $L(\mathcal{H})$ beschreibt alle stetigen und linearen Operatoren von $\mathcal{H}$ in sich.*
11. *Das Spektrum $\sigma(T)$ von T ist durch $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ gegeben.*
12. *Das Spektrum $\sigma(T)$ läßt sich folgendermaßen disjunkt in das Punktspektrum $\sigma_p(T)$, das stetige Spektrum $\sigma_c(T)$ und das Restspektrum*

$\sigma_r(T)$ *aufspalten:*

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \quad | \quad (\lambda \operatorname{Id} - T) \text{ nicht injektiv } \},$$

$$\sigma_c(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\lambda \operatorname{Id} - T) \text{ ist injektiv und das} \\ \text{Bild ist eine echte dichte Teilmenge} \end{array} \right\},$$

$$\sigma_r(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\lambda \operatorname{Id} - T) \text{ ist injektiv} \\ \text{und hat kein dichtes Bild} \end{array} \right\}.$$

Die Definition 2.1.1 angegebenen Spektralteile sind nicht die einzig mögliche Zerlegung des Spektrums an.

Definition 2.1.2. *Das approximative Spektrum $\sigma_{app}(T)$ und das Kompressionsspektrum $\sigma_{komp}(T)$ des in $\mathcal{H}$ dicht definierten Operators T sind durch*

$$\sigma_{app}(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es existiert eine Folge } (x_n) \in dom(T) \\ \text{mit } \|x_n\| = 1 \text{ und } \|(\lambda \operatorname{Id} - T)x_n\| \to 0 \end{array} \right\},$$

$$\sigma_{komp}(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \quad | \quad (\lambda \operatorname{Id} - T) \text{ hat nicht dichtes Bild } \}$$

definiert.

Bemerkung 2.1.3. *Es gelten die Inklusionen*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{app}(T) \qquad \text{und} \qquad \sigma_r(T) \subset \sigma_{komp}(T).$$

Lemma 2.1.4. *Für einen dicht definierten abschließbaren Operator T in $\mathcal{H}$ gilt*

$$\sigma(T^{\mathrm{cl}}) = \sigma(T).$$

Beweis. Zuerst wird gezeigt, daß $\sigma(T) \subset \sigma(T^{\mathrm{cl}})$ gilt. Dazu sei λ ein approximativer Spektralwert von T und $x_n \in dom(T)$ eine approximierende Folge. Für jedes Folgenglied gilt dann

$$\|(\lambda \operatorname{Id} - T^{\mathrm{cl}})(x_n)\| = \|(\lambda \operatorname{Id} - T)(x_n)\|.$$

Somit ist λ auch ein approximativer Spektralwert von T^{cl}. Ist λ aus dem Kompressionsspektrum von T, so hat $\lambda \operatorname{Id} - T$ kein dichtes Bild in $\mathcal{H}$. Beim Übergang von $dom(T)$ zu $dom(T^{\mathrm{cl}})$ kann das Bild aber nicht dicht werden.

Die Aussage $\sigma(T^{\mathrm{cl}}) \subset \sigma(T)$ ist äquivalent zu „$\lambda \notin \rho(T^{\mathrm{cl}})$ impliziert $\lambda \notin \rho(T)$". Um dies zu zeigen, sei $\lambda \notin \rho(T^{\mathrm{cl}})$ und $\lambda \in \rho(T)$ angenommen. Eine Konsequenz der Annahme $\lambda \in \rho(T^{\mathrm{cl}})$ ist die Existenz eines $t > 0$, so daß für alle $x \in dom(T)$ gilt: $\|(\lambda \operatorname{Id} - T)(x)\| \geq t\|x\|$. Da $\lambda \notin \rho(T)$ angenommen ist, existiert kein $\tilde{t} > 0$, so daß für alle $x \in dom(T^{\mathrm{cl}})$ gilt: $\|(\lambda \operatorname{Id} - T^{\mathrm{cl}})(x)\| \geq \tilde{t}\|x\|$. Nach Definiton des Abschlusses existiert für alle $x \in dom(T^{\mathrm{cl}})$ eine Folge x_n in $dom(T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to T^{\mathrm{cl}}x$. Dann folgt auf Grund der Stetigkeit von $\| \, \|$:

$$\begin{aligned} \|(\lambda \operatorname{Id} - T^{\mathrm{cl}})(x)\| &= \| \lim_{n\to\infty} (\lambda \operatorname{Id} - T)(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda \operatorname{Id} - T)(x_n)\| \\ &\geq \lim_{n\to\infty} t\|x_n\| = t\|x\|, \end{aligned}$$

was aber bedeutet, daß $\lambda \in \rho(T^{\mathrm{cl}})$ gilt. $\square$

2.2. **Operatoren in Kreinräumen.**

Kreinräume sind Hilberträume $(\mathcal{H}, (\ ,\ ))$, auf denen zusätzlich ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ definiert ist. Dieses Skalarprodukt ist mit dem positiv definiten Produkt eng verbunden: Es existiert eine gewisse Abbildung $\mathcal{J} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, so daß für alle $x,\ y \in \mathcal{H}$ die Relation $\langle x, y\rangle = (\mathcal{J}(x), y)$ gilt. Aus dem letzten Kapitel sind derartige Beziehungen zwischen den indefiniten und dem positiv definiten Skalarprodukten im Spinormodul und in $L^2_\xi(S)$ bekannt. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß $L^2_\xi(S)$ bezüglich beider indefiniten Skalarprodukte tatsächlich ein Kreinraum ist. Doch zunächst müssen die nötigen Begriffe definiert und sollen später benötigte Sätze zitiert werden. Die Standardreferenzen für Kreinräume sind [AI89] und [Bog74].

Definition 2.2.1. *Unter einem Kreinraum wird ein separabler Hilbertraum $(\mathcal{H}, (\ ,\ ))$ über den reellen oder komplexen Zahlen zusammen mit einer kanonischen Symmetrie $\mathcal{J} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ verstanden. Eine kanonische Symmetrie $\mathcal{J}$ ist ein bezüglich $(\ ,\ )$ unitärer, selbstadjungierter und beschränkter linearer Operator. Ferner existiert ein durch $\mathcal{J}$ induziertes nicht ausgeartetes definites oder indefinites Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$, die sogenannte $\mathcal{J}$-Metrik, die für alle $x, y \in \mathcal{H}$ durch $\langle x, y\rangle := (\mathcal{J}(x), y)$ zu dem positiv definitem Skalarprodukt in Beziehung steht. Ein Kreinraum wird häufig auch $\mathcal{J}$-Raum genannt.*

Bemerkung 2.2.2.

1. *Die obigen Beziehungen sind wohldefinert.*
2. *Die Topologie des Kreinraumes ist nicht abhängig von der gewählten kanonischen Symmetrie, sondern wird einzig durch das positiv definite Skalarprodukt bestimmt. Insbesondere sind Begriffe wie Stetigkeit oder Konvergenz stets bezüglich dieser Topologie zu verstehen.*
3. *Die Existenz einer kanonischen Symmetrie ist gleichbedeutend zu der Forderung nach zwei $(\ ,\ )$-orthogonalen kanonischen Projektionen $P^\pm : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, die durch*
$$P^+ := \frac{1}{2}(Id + \mathcal{J}) \qquad \textit{und} \qquad P^- := \frac{1}{2}(Id - \mathcal{J})$$
definiert sind. Diese Projektionen liefern durch
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{H}^\pm = P^\pm(\mathcal{H})$$
eine orthogonale Zerlegung von $\mathcal{H}$.

Beispiel 2.2.3. *Ein Beispiel für einen Kreinraum ist der Hilbertraum l^2 der unendlichen Folgen, deren quadrierte Beträge aufsummiert konvergieren. Auf l^2 sind für $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ und $y = \{y_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ die beiden Skalarprodukte $(\ ,\ )$ und $\langle\ ,\ \rangle$ durch*
$$(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \overline{y}_i \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \overline{y}_{-i-1}$$

gegeben. Der Operator $\mathcal{J}$ ist die durch

$$\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty} \longmapsto \mathcal{J}(\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}) := \{x_{-i-1}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$$

gegebene Involution.

Definition 2.2.4. *Ein Operator T im Kreinraum $(\mathcal{H}, (\ ,\ ), \langle\ ,\ \rangle, \mathcal{J})$ heißt $\mathcal{J}$-selbstadjungiert (wesentlich $\mathcal{J}$-selbstadjungiert, $\mathcal{J}$-symmetrisch, $\mathcal{J}$-normal, $\mathcal{J}$-unitär, etc.) falls er bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ selbstadjungiert (wesentlich selbstadjungiert, symmetrisch, normal, unitär, etc.) ist.*

Definition 2.2.5. *Der bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ adjungierte Operator von T wird mit $T^{\langle * \rangle}$ bezeichnet.*

Satz 2.2.6 ([AI89], S. 105, 3.8)**.**
Es sind äquivalent:

1. *Der Operator T ist $\mathcal{J}$-selbstadjungiert.*
2. *Der Operator $\mathcal{J}T$ ist bezüglich $(\ ,\ )$ selbstadjungiert.*
3. *Der Operator $T\mathcal{J}$ ist bezüglich $(\ ,\ )$ selbstadjungiert.*

Satz 2.2.7 ([Bog74], S. 122, Theorem 2.7)**.**
Sei T ein dicht definierter abgeschlossener Operator im Kreinraum $\mathcal{K}$. Dann gilt:

1. $\lambda \in \sigma(T) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^{\langle * \rangle})$
2. $\lambda \in \sigma_c(T) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_c(T^{\langle * \rangle})$
3. $\lambda \in \sigma_r(T) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^{\langle * \rangle})$
4. $\lambda \in \sigma_p(T) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^{\langle * \rangle}) \cup \sigma_r(T^{\langle * \rangle})$

Korollar 2.2.8. *Für einen dicht definerten, abgeschlossenen und selbstadjungierten Operator T im Kreinraum $\mathcal{K}$ gilt:*

1. *Das Spektrum von T ist symmetrisch zur reellen Achse.*
2. *Das stetige Spektrum von T ist symmetrisch zur reellen Achse.*
3. *Ist λ aus dem Restspektrum von T, so ist $\overline{\lambda}$ aus dem Punktspektrum von T.*
4. *Ist λ aus dem Punktspektrum von T, so ist $\overline{\lambda}$ aus dem Punkt- oder dem Restspektrum von T.*

2.3. $L^2_\xi(S)$ ist ein $\mathcal{J}$-Raum.

Der hier geführte Beweis, daß $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle_\gamma, \mathcal{J}_\gamma)$ für $\gamma \in \{a; b\}$ ein Kreinraum ist, findet sich für $\gamma = b$ in Abschnitt 3.3.1 von [Bau81].

Satz 2.3.1. *Die Cliffordmultiplikation $\mu : \Gamma_c(TM \otimes S) \longrightarrow \Gamma_c(S)$ ist bezüglich der Normtopologien in den Schnitträumen stetig.*

Beweis. Die Cliffordmultiplikation $\mu_m : T_mM \otimes \Delta_{n,k} \longrightarrow \Delta_{n,k}$ ist für festes $m \in M$ eine lineare Abbildung. Sie ist stetig, da sie durch Matrizenmultiplikation definiert ist. Somit existiert eine reelle Konstante C_m, so daß für alle $x \in T_mM \cong \mathbb{R}^{n,k}$ und $u \in S_m \cong \Delta_{n,k}$ die Ungleichung $\big(\mu_m(x \otimes u), \mu_m(x \otimes u)\big)_\Delta \leq C_m \cdot r_\xi(x,x) \cdot (u,u)_\Delta$ erfüllt ist. Zu jedem $t \otimes \psi \in \Gamma_c(TM \otimes S)$ existiert dann eine Konstante C, so daß obige Ungleichung mit $C_m = C$ für alle $m \in M$ gilt, da $t \otimes \psi$ einen kompakten Träger hat. Die Abschätzung $(t\cdot\psi, t\cdot\psi)_\xi \leq C(t\otimes\psi, t\otimes\psi)^\otimes_\xi$ folgt aus

$$\begin{aligned}
(t \cdot \psi, t \cdot \psi)_\xi &= \int_M (t(m) \cdot u(m), t(m) \cdot u(m))_\Delta dM \\
&\leq \int_M C_{m,t(m)} \cdot r_\xi(t,t)(m) \cdot (\psi,\psi)_\Delta(m) dM \\
&\leq C \cdot (t \otimes \psi, t \otimes \psi)^\otimes_\xi.
\end{aligned}$$

Die Linearität der Cliffordmultiplikation impliziert die Stetigkeit. □

Korollar 2.3.2. *Die Cliffordmultiplikation μ läßt sich stetig und linear auf $L^2_\xi(TM \otimes S)$ fortsetzen.*

Lemma 2.3.3. *Für $\gamma \in \{a,b\}$ ist $\mathcal{J}_\gamma$ bijektiv, involutorisch, linear, in der Normtopologie beschränkt und symmetrisch bezüglich $\langle\ ,\ \rangle^S_\gamma$.*

Beweis.

1. Nach Definition ist $\mathcal{J}_\gamma$ linear.
2. Nach Lemma 1.7.3 gilt $\mathcal{J}_\gamma^2 = \mathrm{Id}$. Insbesondere ist $\mathcal{J}_\gamma$ somit bijektiv und involutorisch.
3. Aus $(\gamma \cdot v, w)_\Delta = (v, \gamma \cdot w)_\Delta$ (Lemma 1.4.10) und $\gamma^2 = 1$ folgt sofort die formale Selbstadjungiertheit von $\mathcal{J}_\gamma$.
4. Wie im Beweis von Satz 2.3.1 schließt man, daß $\mathcal{J}_\gamma$ in der Normtopologie beschränkt ist.

□

Korollar 2.3.4. *Das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_\gamma$ ist stetig in der Normtopologie von $\Gamma_c(S) \times \Gamma_c(S)$.*

Korollar 2.3.5. *Das indefinite Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_\gamma$ läßt sich stetig auf $L^2_\xi(S) \times L^2_\xi(S)$ fortsetzen.*

Korollar 2.3.6. *Für $\gamma \in \{a,b\}$ ist $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle_\gamma, \mathcal{J}_\gamma)$ ein Kreinraum.*

2.4. **Die wesentliche Selbstadjungierheit des Diracoperators.** Die wesentliche Selbstadjungiertheit von $i^{r-1}D$ und $i^k D$ in den entsprechenden Kreinräumen ist schon lange bekannt. Der hier geführte Beweis nutzt nicht den sonst häufig beschrittenen Weg über einen Satz von Joseph A. Wolf ([Wol73]), sondern wird mit Hilfe eines Satzes von Paul R. Chernoff ([Che73]) geführt. Dazu wird zunächst gezeigt, daß im entsprechenden Kreinraum $i^{r-1}D$ beziehungsweise $i^k D$ symmetrisch bezüglich des indefinten Skalarprodukts ist. Genaugenommen wird in diesem Abschnitt bewiesen, daß jede Potenz wesentlich selbstadjungiert ist.

Lemma 2.4.1. *Auf den glatten Schnitten mit kompaktem Träger $\Gamma_c(S)$ ist der Diracoperator $i^{r-1}D$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_a$ formal selbstadjungiert. Im Kreinraum $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle_a, \mathcal{J}_a)$ gilt also $i^{r-1}D \subset (i^{r-1}D)^{\langle * \rangle}$.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum riemannschen Fall, wie er beispielsweise auf Seite 114/115 von [LM89] geführt wird. Dabei muß jedoch Lemma 1.7.11 berücksichtigt werden:

$$\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle_a = -(-1)^{r-1} \langle \varphi, X \cdot \psi \rangle_a.$$

Für $m \in M$ und eine synchrone Orthonormalbasis $\{e_i\}$ in $T_m M$ gilt für Spinoren φ, ψ mit kompaktem Träger im Punkt m:

$$\begin{aligned}
\langle D\varphi(m), \psi(m) \rangle_{a,\Delta} &= \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \langle e_k \cdot \nabla_{e_k} \varphi(m), \psi(m) \rangle_{a,\Delta} \\
&= -(-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \langle \nabla_{e_k} \varphi(m), e_k \cdot \psi(m) \rangle_{a,\Delta} \\
&= -(-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \Big(e_k \cdot \langle \varphi(m), e_k \cdot \psi(m) \rangle_{a,\Delta} \\
&\qquad\qquad - \langle \varphi(m), (\nabla_{e_k e_k}) \cdot \psi(m) \rangle_{a,\Delta} \\
&\qquad\qquad - \langle \varphi(m), e_k \cdot \nabla_{e_k} \psi(m) \rangle_{a,\Delta} \Big) \\
&= -(-1)^{r-1} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e_k \cdot \langle \varphi(m), e_k \cdot \psi(m) \rangle_{a,\Delta} \\
&\qquad + (-1)^{r-1} \langle \varphi(m), D\psi(m) \rangle_{a,\Delta}
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist nun die Divergenz eines geeignet gewählten Vektorfeldes V. Intergration liefert nun

$$\langle D\varphi, \psi \rangle_a = (-1)^r \int_{\partial M} \langle \nu \cdot \varphi, \psi \rangle_a + (-1)^{r-1} \langle \varphi, \psi \rangle_a,$$

wobei ν den äußeren Normalenvektor bezeichne. Da φ kompakten Träger im Innern von M hat, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.4.2. *Der Operator $i^k D$ mit Definitionsbereich $\Gamma_c(S)$ ist bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_b$ formal selbstadjungiert. In $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle_b, \mathcal{J}_b)$ gilt somit $i^k D \subset (i^k D)^{\langle * \rangle}$.*

Beweis. Der Beweis wird analog geführt, es muß lediglich die für das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_{b,\Delta}$ geltende Relation benutzt werden. □

Satz 2.4.3 (Chernoff, [Che73]).
Sei ξ ein komplexes Vektorbündel über der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g). Weiterhin sei L ein Differentialoperator erster Ordnung mit dem Definitionsbereich $\Gamma_c(\xi)$, so daß $-L \subset L^*$ und $\int_0^\infty 1/c(r)dr = \infty$ gelten[1]. Auf dem Hilbertraum $L^2(\xi)$, dem Abschluß von $\Gamma_c(\xi)$, ist $T := -iL$ mit Definitionsbereich $\Gamma_c(\xi)$ ein symmetrischer Operator. Unter diesen Voraussetzungen ist jede Potenz von T wesentlich selbstadjungiert.

Korollar 2.4.4. *Sei $(M^{n,k}, g)$ eine raum- und zeitorientierbare semiriemannsche Spinmannigfaltigkeit. Ferner sei ξ ein maximal zeitartiges Teilbündel von TM, so daß die assoziierte riemannsche Struktur (M, r_ξ) vollständig ist. Dann gilt:*

1. *Jede Potenz des für eine fixierte Spinstruktur (Q, f) definierten Diracoperators $i^{r-1}D$ mit dem Definitionsbereich $\Gamma_c(S)$ ist bezüglich dem indefiniten Skalarproduktes $\langle\ ,\ \rangle^S_a$ wesentlich selbstadjungiert. Folglich ist $i^{r-1}D$ im Kreinraum $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle_a, \mathcal{J}_a)$ wesentlich selbstadjungiert.*
2. *Jede Potenz des für eine fixierte Spinstruktur (Q, f) auf den glatten L^2-Schnitten mit kompaktem Träger im Spinorbündel S definerten Diracoperators $i^k D$ ist wesentlich selbstadjungiert. Insbesondere ist $i^k D$ im Kreinraum $(L^2(S)_\xi, (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle_b, \mathcal{J}_b)$ wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis. Zunächst ist das Spinorbündel S ein komplexes Vektorbündel über der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, r_ξ). Die Behauptung wird nun für $i^{r-1}D$ gezeigt, die Rechnungen im anderen Kreinraum verlaufen analog.

---

[1]Bemerkung zur Integralbedingung:
Das Symbol von L sei mit $\sigma(L)$ bezeichnet. Dann kann für $m \in M$ punktweise $c(m) := \sup\{\|\sigma(L)(m,\omega)\| \mid (m,\omega) \in T^*_m M \text{ und } |\omega| = 1\}$ definiert werden, wobei unter $\|\ \|$ die Operatornorm und unter $|\ |$ die von der riemannschen Metrik induzierte Norm im Kotangentialbündel T^*M verstanden sei. Die Größe $c(m)$ kann als die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals von Punkt m aus interpretiert werden. Ist $m_0 \in M$ fixiert, so bezeichnet in folgenden $S(r)$ die geodätische Vollkugel um m_0 vom Radius r. Die Größe $c(r)$, definiert durch $c(r) := \sup\{c(m) \mid m \in S(r)\}$, ist dann das Supremum der Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Signalen, die in der Kugel $S(r)$ starten. Das Integral $\int_0^\infty 1/c(r)dr$ ist nun eine Abschätzung für die benötigte Zeit, aus der Kugel $S(r)$ zu einem bezüglich der riemannschen Abstandsfunktion unendlich fernen Punkt zu gelangen. Die Divergenz des Integrals ist gleichbedeutend dazu, daß ein solcher Punkt nicht in endlicher Zeit erreicht werden kann.

Ist $L := -i^{r-2}D$ definiert, so ist $-iL = i^{r-1}D$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_a^S$ ein symmetrischer Operator auf den glatten Schnitten mit kompaktem Träger. Für den adjungierten Operator $L^{\langle * \rangle}$ von L folgt wegen

$$-L = -i(i^{r-1}D) \subset -i(i^{r-1}D)^{\langle * \rangle} = (-i^{r-2}D)^{\langle * \rangle} = L^{\langle * \rangle},$$

daß $-L \subset L^{\langle * \rangle}$ gilt. Bezüglich des positiv definiten Skalarproduktes folgt somit $-(\mathcal{J}_a \circ L) \subset (\mathcal{J}_a \circ L)^*$, denn es gilt für Schnitte φ, ψ mit kompaktem Träger:

$$\begin{aligned}
(\varphi, (\mathcal{J}_a \circ L)^* \psi)_\xi &= (\varphi, L^* \circ \mathcal{J}_a^* \psi)_\xi = ((\mathcal{J}_a \circ L)\varphi, \psi)_\xi \\
&= \langle L\varphi, \psi \rangle_a = \langle \varphi, L^{\langle * \rangle} \psi \rangle_a \\
&= \langle \varphi, (-L)\psi \rangle_a = (\varphi, \mathcal{J}_a \circ (-L)\psi)_\xi \\
&= (\varphi, -(\mathcal{J}_a \circ L)\psi)_\xi.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $-(\mathcal{J}_a \circ L) \subset (\mathcal{J}_a \circ L)^*$ bezüglich dem positiv definiten Skalarproduktes gilt.

Unter Verwendung von $\mathcal{J}_a(X \cdot \psi) = (-1)^{r-1}\vartheta(X) \cdot \mathcal{J}_a(\psi)$, $(\mathcal{J}_a)^2 = \mathrm{Id}$ und $\vartheta(X) \cdot X = -r_\xi(X, X)$ sowie der Tatsache, daß das Hauptsymbol $\sigma(D)$ des Diracoperators der Cliffordmultiplikation entspricht, gilt für $(m, \omega) \in T^*M$ und $\varphi \in \Gamma_c(S)$:

$$\begin{aligned}
\sigma((\mathcal{J}_a \circ (-i^{r-2}D))^2)(m, \omega)(\varphi) &= i^{2r} \mathcal{J}_a(X_\omega \cdot \mathcal{J}_a(X_\omega \cdot \varphi)) \\
&= (-1)^{r+r-1} \vartheta(X_\omega) \cdot X_\omega \cdot \varphi \\
&= -r_\xi(X_\omega, X_\omega)\varphi.
\end{aligned}$$

Es folgt $c(m) = 1$ für alle $m \in M$, woraus sich $c(r) = 1$ für alle $r > 0$ ergibt. Das Integral $\int_0^\infty 1/c(r)dr$ ist also divergent und mit Satz 2.4.3 folgt, daß $-i(\mathcal{J}_a \circ L) = \mathcal{J}_a \circ (-iL)$ bezüglich dem positiv definiten Skalarprodukt wesentlich selbstadjungiert ist. Das bedeutet aber, daß $-iL$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_a$ wesentlich selbstadjungiert ist. $\square$

2.5. **Allgemeine Spektraleigenschaften des Diracoperators.**

Auf den ersten Blick scheinen die Sätze 2.5.3, 2.5.5 und 2.5.7 gleich, doch tatsächlich unterscheiden sich ihre Voraussetzungen geringfügig: Zunächst ist die Dimension n der betrachteten Mannigfaltigkeit gerade, danach wird erst der Fall $n \equiv 3 \mod 4$ und schließlich $n \equiv 1 \mod 4$ behandelt. Der Grund ist, daß in den Aussagen vier und fünf des Satzes 1.8.13

$$D \circ {}_aS(\varphi) = \begin{cases} (-1)^r \, {}_aS \circ D(\varphi), & \text{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^{r-1} \, {}_aS \circ D(\varphi), & \text{falls } n \equiv 2,3 \mod 4, \end{cases}$$

$$D \circ {}_bS(\varphi) = \begin{cases} (-1)^{k+1} \, {}_bS \circ D(\varphi), & \text{falls } n \equiv 0,1 \mod 4 \\ (-1)^{k} \, {}_bS \circ D(\varphi), & \text{falls } n \equiv 2,3 \mod 4. \end{cases}$$

gilt. Weiterhin gelten nach Korollar 2.2.8 gewisse Inklusionen und Symmetrien der Spektralteile abgeschlossener selbstadjungierter Operatoren in Kreinräumen. Diese sind im Gegensatz zu den Vertauschungsregeln von ${}_aS$ und ${}_bS$ mit D unabhängig von der Dimension der Mannigfaltigkeit und abhängig von dem betrachteten Kreinraum $L^2_\xi(S)$. Diese Symmetrien werden in den Lemmata 2.5.1 und 2.5.2 angegeben. Insgesamt können dann die Korollare 2.5.4, 2.5.6 und 2.5.8 in den verschiedenen Dimensionen gefolgert werden, insbesondere die Tatsache, daß in den Dimensionen $n \equiv 0,2,3 \mod 4$ der Diracoperator kein Restspektrum besitzt. In geraden Dimensionen sind die Symmetrien schon lange bekannt, siehe hierzu [Bau81]. In [Bau94] wird dasselbe Verfahren angewandt, doch stimmen die dort angegebenen Vertauschungsregeln der Symmetrie j, die in der hier benutzten Notation im wesentlichen $s_{n,k}$ ist, mit der Cliffordmultiplikation nur im Fall $n \equiv 2,3 \mod 4$. Die in dieser Arbeit hergeleiteten Relationen liefern bis auf den Fall $n \equiv 1 \mod 4$ dieselben Resultate.

Lemma 2.5.1. *Für das Spektrum $\sigma(D^{\mathrm{cl}})$ des Abschlusses vom Diracoperator D in $(L^2(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle^S_a, \mathcal{J}_a)$ gilt:*

1. *Ist $\lambda \in \sigma_c(D^{\mathrm{cl}})$, so ist $(-1)^{r-1}\overline{\lambda} \in \sigma_c(D^{\mathrm{cl}})$.*
2. *Ist $\lambda \in \sigma_r(D^{\mathrm{cl}})$, so ist $(-1)^{r-1}\overline{\lambda} \in \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$.*
3. *Ist $\lambda \in \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$, so ist $(-1)^{r-1}\overline{\lambda} \in \sigma_p(D^{\mathrm{cl}}) \cup \sigma_r(D^{\mathrm{cl}})$.*

Beweis. Der Beweis des Lemmas ist in den drei zu betrachtenden Spektralteilen prinzipiell gleich, deshalb wird nur die Behauptung für $\lambda \in \sigma_r(D^{\mathrm{cl}})$ bewiesen.
Ist $\lambda \in \sigma_r(D^{\mathrm{cl}})$, so ist $i^{r-1}\lambda \in \sigma_r(i^{r-1}D^{\mathrm{cl}})$. Nach Korollar 2.2.8 und aus der Selbstadjungiertheit von $i^{r-1}D^{\mathrm{cl}}$ folgt $(-1)^{r-1}i^{r-1}\overline{\lambda} \in \sigma_p(i^{r-1}D^{\mathrm{cl}})$. Damit gilt $i^{3(r-1)}(-1)^{r-1}i^{r-1}\overline{\lambda} \in \sigma_p(i^{3(r-1)}i^{r-1}D^{\mathrm{cl}})$, was die gewünschte Identität $(-1)^{r-1}\overline{\lambda} \in \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$ liefert. □

Lemma 2.5.2. *Für das Spektrum $\sigma(D^{\mathrm{cl}})$ des Abschlusses vom Diracoperator D in $(L^2(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle^S_b, \mathcal{J}_b)$ gilt:*

1. *Ist* $\lambda \in \sigma_c(D^{\mathrm{cl}})$, *so ist* $(-1)^k\overline{\lambda} \in \sigma_c(D^{\mathrm{cl}})$
2. *Ist* $\lambda \in \sigma_r(D^{\mathrm{cl}})$, *so ist* $(-1)^k\overline{\lambda} \in \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$
3. *Ist* $\lambda \in \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$, *so ist* $(-1)^k\overline{\lambda} \in \sigma_p(D^{\mathrm{cl}}) \cup \sigma_r(D^{\mathrm{cl}})$

Beweis. Die Behauptung wird wie Lemma 2.5.1 bewiesen. □

Bei den in Abschnitt 1.8 definierten reellen und quaternionischen Strukturen ${}_aS$ und ${}_bS$ im Spinorbündel handelt es sich um Symmetrien, die sich beide auf die Kreinräume $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle^S_a, \mathcal{J}_a)$ und $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle^S_b, \mathcal{J}_b)$ fortsetzen lassen. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Spektralteile des Abschlusses des Diracoperators einer semiriemannschen Spinmannigfaltigkeit genauer untersuchen. Im folgenden wird stets D^{cl} auf $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle^S_a, \mathcal{J}_a)$ betrachtet, entsprechende Aussagen gelten auch in $(L^2_\xi(S), (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle^S_b, \mathcal{J}_b)$.

Satz 2.5.3. *Es sei* $(M^{n,k}, g)$ *eine raum- und zeitartig orientierbare semiriemannsche Spinmannigfaltigkeit gerader Dimension mit assoziierter vollständiger riemannscher Struktur. Dann gilt:*

1. *Für jeden Spektralwert* λ *des Abschlusses des Diracoperators* D^{cl} *sind* $-\lambda, \overline{\lambda}, -\overline{\lambda}$ *ebenfalls Spektralwerte.*
2. *Ist* λ *aus dem Punktspektrum (Restspektrum, stetigen Spektrum) von* D^{cl}, *so trifft dies auch auf* $\overline{\lambda}$, $-\overline{\lambda}$ *und* $-\lambda$ *zu.*
3. *Das stetige, das Punkt- und das Restspektrum von* D^{cl} *ist symmetrisch zur reellen und imaginären Achse.*

Beweis.

1. Die erste und dritte Behauptung folgen sofort aus der zweiten.
2. Nach Satz 1.8.13 gelten folgende Identitäten:

$$D \circ {}_aS = \begin{cases} (-1)^r\, {}_aS \circ D, & \text{falls } n \equiv 0 \mod 4 \\ (-1)^{r-1}\, {}_aS \circ D, & \text{falls } n \equiv 2 \mod 4, \end{cases}$$

$$D \circ {}_bS = \begin{cases} (-1)^{k+1}\, {}_bS \circ D, & \text{falls } n \equiv 0 \mod 4 \\ (-1)^{k}\, {}_bS \circ D, & \text{falls } n \equiv 2 \mod 4. \end{cases}$$

   Weiterhin sind r und k beide gerade oder beide ungerade.
   Gilt $\lambda \in \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$, so ist $\lambda\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}}$ nicht injektiv, das heißt, daß ein Spinor $\psi \not\equiv 0$ mit $(\lambda\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})\psi \equiv 0$ existiert. Nun sei $\varphi_\gamma = {}_\gamma S\varphi$. Dann gilt je nach Dimension:
   <u>$n \equiv 0 \mod 4$:</u>

$$((-1)^r\overline{\lambda}\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})\varphi_a = (-1)^r\, {}_aS((\lambda\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})(\psi)) = 0,$$
$$((-1)^{k+1}\overline{\lambda}\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})\varphi_b = (-1)^{k+1}\, {}_bS((\lambda\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})(\psi)) = 0.$$

   <u>$n \equiv 2 \mod 4$:</u>

$$((-1)^{r-1}\overline{\lambda}\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})\varphi_a = (-1)^{r-1}\, {}_aS((\lambda\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})(\psi)) = 0,$$
$$((-1)^{k}\overline{\lambda}\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})\varphi_b = (-1)^{k}\, {}_bS((\lambda\,\mathrm{Id} - D^{\mathrm{cl}})(\psi)) = 0.$$

Somit sind in beiden Fällen $\overline{\lambda}$ und $-\overline{\lambda}$ im Punktspektum von D^{cl}. Damit muß auch $-\lambda$ im Punktspektrum liegen.
Die Argumentation für das stetige Spektrum und das Restspektrum basiert nun auf der Tatsache, daß ${}_\gamma S$ als Involution surjektiv ist, dichte Mengen auf dichte Mengen und nicht dichte Mengen auf nicht dichte Mengen abbildet.
Sei nun $\lambda \in \sigma_c(D^{\mathrm{cl}})$. Dann ist $\lambda \operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}$ injektiv, nicht surjektiv und hat dichtes Bild. Dimensionsabhängig gilt:
<u>$n \equiv 0 \mod 4$:</u>

$$\begin{aligned}((-1)^r\overline{\lambda}\operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}) \circ {}_aS &= (-1)^r\, {}_aS \circ (\lambda \operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}),\\ ((-1)^{k+1}\overline{\lambda}\operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}) \circ {}_bS &= (-1)^{k+1}\, {}_bS \circ (\lambda \operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}).\end{aligned}$$

<u>$n \equiv 2 \mod 4$:</u>

$$\begin{aligned}((-1)^{r-1}\overline{\lambda}\operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}) \circ {}_aS &= (-1)^{r-1}\, {}_aS \circ (\lambda \operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}),\\ ((-1)^{k}\overline{\lambda}\operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}) \circ {}_bS &= (-1)^{k}\, {}_bS \circ (\lambda \operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}).\end{aligned}$$

Somit folgt in beiden Fällen, daß $\pm\overline{\lambda}\operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}$ injektiv, aber nicht surjektiv ist und ein dichtes Bild hat, das heißt, daß $\pm\overline{\lambda} \in \sigma_c(D^{\mathrm{cl}})$ gilt. Damit liegt auch $-\lambda$ im stetigen Spektrum.
Ist $\lambda \in \sigma_r(D^{\mathrm{cl}})$, so liefert dieselbe Rechnung, daß $\pm\overline{\lambda}\operatorname{Id} - D^{\mathrm{cl}}$ injektiv ist und kein dichtes Bild hat. Damit liegen $\pm\overline{\lambda}$ und $-\lambda$ im Restspektrum.

□

Korollar 2.5.4. *Sei $(M^{n,k}, g)$ eine raum- und zeitartig orientierbare semiriemannsche Spinmannigfaltigkeit gerader Dimension, deren zugehörige riemannsche Struktur vollständig ist. Dann hat der Abschluß D^{cl} des Diracoperators kein Restspektrum.*

Beweis. Nach Satz 2.5.3 gilt $\sigma_r(D^{\mathrm{cl}}) \subset -\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})}$ und $\sigma_r(D^{\mathrm{cl}}) \subset \overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})}$. Lemma 2.5.1 impliziert, daß $-\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})} \subset \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$ für k gerade und $\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})} \subset \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$ für k ungerade gilt. Die Inklusion $\sigma_r(D^{\mathrm{cl}}) \subset \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$ gilt in beiden Fällen, was wegen der Disjunktheit von Punkt- und Restspektrum $\sigma_r(D^{\mathrm{cl}}) = \emptyset$ zur Folge hat. □

Satz 2.5.5. *Sei $(M^{n,k}, g)$ mit $n \equiv 3 \mod 4$ gegeben. Dann gilt:*

1. *Für k gerade ist mit λ auch $\overline{\lambda}$ ein Spektralwert von D^{cl}. Ist λ aus dem Punktspektrum (Restspektrum, stetigen Spektrum), so trifft dies auch auf $\overline{\lambda}$ zu. Das stetige Spektrum, das Punktspektrum und das Restpektrum liegen also symmetrisch zur reellen Achse.*
2. *Für k ungerade ist mit λ auch $-\overline{\lambda}$ ein Spektralwertvon D^{cl}. Ist ferner λ aus dem Punktspektrum (Restspektrum, stetigen Spektrum), so trifft dies auch auf $-\overline{\lambda}$ zu. Das stetige Spektrum, das Punktspektrum und das Restpektrum liegen somit symmetrisch zur imaginären Achse.*

Beweis. Nach Satz 1.8.13 gelten folgende Identitäten:

$$D \circ {}_aS = (-1)^{r-1}\, {}_aS \circ D, \qquad \text{falls } n \equiv 3 \mod 4$$
$$D \circ {}_bS = (-1)^{k}\, {}_bS \circ D, \qquad \text{falls } n \equiv 3 \mod 4.$$

1. Ist k gerade, so muß r ungerade sein. Es folgen $D \circ {}_aS = {}_aS \circ D$ und $D \circ {}_bS = {}_bS \circ D$. Wie in Satz 2.5.3 folgt nun, daß mit λ auch $\overline{\lambda}$ ein Spektralwert gleicher Art ist.
2. Ist k ungerade, so muß r gerade sein. Dann gilt $D \circ {}_aS = -\,{}_aS \circ D$ und $D \circ {}_bS = -\,{}_bS \circ D$. Wie in Satz 2.5.3 folgt nun, daß mit λ auch $-\overline{\lambda}$ ein Spektralwert gleicher Art ist.

□

Korollar 2.5.6. *Gilt* $n \equiv 3 \mod 4$ *für die Dimension von* $(M^{n,k}, g)$, *so folgt für das Spektrum des Abschlusses des Diracoperators:*

1. *Für k gerade sind das stetige Spektrum und das Punktspektrum symmetrisch zur reellen Achse. Das Restspektrum ist nicht vorhanden.*
2. *Für k ungerade sind das stetige Spektrum und das Punktspektrum symmetrisch zur imaginären Achse. Das Restspektrum ist nicht vorhanden.*

Beweis. Nach Satz 2.5.5 gilt $\sigma_r(D^{\mathrm{cl}}) \subset \overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})}$, falls k gerade. Falls k ungerade ist, gilt ebenfalls nach Satz 2.5.5 $\sigma_r(D^{\mathrm{cl}}) \subset -\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})}$. Aus Lemma 2.5.1 folgt $\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})} \subset \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$, falls k gerade, während für k ungerade die Inklusion $-\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})} \subset \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$ gilt. In beiden Fällen folgt $\sigma_r(D^{\mathrm{cl}}) \subset \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$. Das impliziert wegen der Disjunktheit von Punkt- und Restspektrum $\sigma_r(D^{\mathrm{cl}}) = \emptyset$. □

Satz 2.5.7. *Ist* $(M^{n,k}, g)$ *eine raum- und zeitartig orientierbare semiriemannsche Spinmannigfaltigkeit, für die* $n \equiv 1 \mod 4$ *gilt und deren assoziierte riemannsche Struktur vollständig ist, so folgt:*

1. *Ist k gerade, so ist mit λ auch $-\overline{\lambda}$ ein Spektralwert von D^{cl}. Ist λ aus dem Punktspektrum (Restspektrum, stetigen Spektrum), so trifft dies auch auf $-\overline{\lambda}$ zu. Damit liegen das stetige Spektrum, das Punktspektrum und das Restpektrum symmetrisch zur imaginären Achse.*
2. *Ist k ungerade, so ist neben λ auch $\overline{\lambda}$ ein Spektralwert von D^{cl}. Ist ferner λ aus dem Punktspektrum (Restspektrum, stetigen Spektrum), so trifft dies auch auf $\overline{\lambda}$ zu. Damit liegen das stetige Spektrum, das Punktspektrum und das Restpektrum symmetrisch zur reellen Achse liegen.*

Beweis. Nach Satz 1.8.13 gelten folgende Identitäten:

$$D \circ {}_aS_{n,k} = (-1)^{r}\, {}_aS_{n,k} \circ D, \qquad \text{falls } n \equiv 1 \mod 4,$$
$$D \circ {}_bS_{n,k} = (-1)^{k+1}\, {}_bS_{n,k} \circ D, \qquad \text{falls } n \equiv 1 \mod 4.$$

1. Ist k gerade, so muß r ungerade sein. Es gelten $D \circ {}_aS = -{}_aS \circ D$ und $D \circ {}_bS = -{}_bS \circ D$. Wie im letzten Satz folgt nun, daß mit λ Spektralwert auch $-\overline{\lambda}$ ein Spektralwert gleicher Art ist.
2. Ist k ungerade, so muß r gerade sein. Dann gelten $D \circ {}_aS = {}_aS \circ D$ und $D \circ {}_bS = {}_bS \circ D$. Wie in Satz 2.5.3 folgt nun, daß mit λ Spektralwert auch $\overline{\lambda}$ ein Spektralwert gleicher Art ist.

□

Korollar 2.5.8. *Ist $(M^{n,k}, g)$ eine Spinmannigfaltigkeit der Dimension $n \equiv 1 \mod 4$, so gilt für das Spektrum von D^{cl}:*

1. *Das stetige Spektrum ist sowohl zur reellen als auch zur imaginären Achse symmetrisch.*
2. *Ist k gerade, so sind das Punktspektrum und das Restspektrum symmetrisch zur imaginären Achse. Ferner gilt $\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})} \subset \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$.*
3. *Ist k ungerade, so sind das Punktspektrum und das Restspektrum symmetrisch zur reellen Achse. Ferner gilt $\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})} \subset -\sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$.*

Beweis. Wie bei den Korollaren 2.5.4 und 2.5.6 folgt die Behauptung aus Lemma 2.5.1 und Satz 2.5.7. □

Bemerkung 2.5.9. *In* [Bau81] *hat Helga Baum das Punktspektrum auf einer Klasse dreidimensionaler Sphären mit einer Metrik von Index* 2 *und auf einer Klasse dreidimensionaler Lorentztori mit darstellungstheoretischen Methoden berechnet. Für $S^{3,2}$ konnte eine Symmetrie des Punktspektrums zur reellen Achse und für $T^{3,1}$ eine Symmetrie zur imaginären Achse nachgewiesen werden. Da Lemma 2.5.1 zur Verfügung stand, konnte sie folgern, daß das Restspektrum verschwindet. Korollar 2.5.6 zeigt, daß diese Symmetrien stets vorliegen. Sie konnte weiterhin zeigen, daß das Punktspektrum auf den betrachteten Sphären $S^{3,2}$ nicht symmetrisch zur imaginären Achse ist. In ungeraden Dimensionen ist somit nicht eine so große Symmetrie der Spektralteile zu erwarten, wie sie in geraden Dimensionen anzutreffen ist.*

3. Ein Kodimension-1-Formalismus und dessen Konsequenzen auf Produkträumen

In diesem Kapitel wird auf semiriemannschen Mannigfaltigkeiten ein Analogon für das Kodimension-1-Kalkül aus [BFGK91] entwickelt, mit dessen Hilfe Produkte einer Mannigfaltigkeit B mit der eindimensionalen Sphäre untersucht werden können. Jede Spinstruktur auf B induziert auf $B \times S^1$ zwei Spinstrukturen. Im Fall von relativ einfachen Produkträumen können Eigenwerte des Diracoperators auf $B \times S^1$ aus Eigenwerten des Diracoperators auf B hergeleitet werden. Ebenso können einige allgemeingültige Aussagen über die Existenz harmonischer Spinoren gemacht werden.

Im abschließenden Abschnitt wird eine gewöhnliche Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten angegeben, deren periodische Lösungen Eigenspinoren und Eigenwerte auf Warped-Produkten implizieren.

In diesem Kapitel sei $(M^{n,k}, g)$ stets eine raum- und zeitartig orientierbare Spinmannigfaltigkeit mit fixierter $Spin_+(n,k)$-Struktur (Q, f). Das zusammenhängende Repèrebündel von (M, g) wird gemäß Bemerkung 1.3.5 mit P bezeichnet

Weiterhin bezeichnen (M, g) und $(M, \tilde{g})$ zwei konform-äquivalente semiriemannsche Mannigfaltigkeiten, das heißt, daß eine glatte Funktion $\sigma \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)$ existiert, so daß in jedem $m \in M$ zwischen beiden Metriken die Relation $g_m = \sigma^{-2}(m)\tilde{g}_m$ gilt.

3.1. **Bemerkungen zu konform-äquivalenten Mannigfaltigkeiten.**

Besitzt eine Mannigfaltigkeit M eine Spinstruktur, so induziert jede gegebene Spinstruktur auf M eine Spinstruktur auf jeder durch konforme Änderung hervorgehenden Mannigfaltigkeit. Die Diracoperatoren zweier konform äquivalenter Mannigfaltigkeiten und „konform äquivalenter Spinstrukturen“ lassen sich miteinander vergleichen. Dies wird beispielsweise in [Bau81] beschrieben. Dort ist auch der Satz über die Dimensionsinvarianz des Raumes der harmonischen Spinoren unter konformer Änderung der Metrik zu finden.

Bemerkung 3.1.1.

1. *Sind* (V, g) *und* $(V, \tilde{g})$ *konform-äquivalente Vektorräume, das heißt, daß* $g = \sigma^{-2}\tilde{g}$ *gilt, so ist* $\{e_i\}$ *genau dann eine Orthonormalbasis von* (V, g)*, wenn durch* $\{\tilde{e}_i := \sigma^{-1}e_i\}$ *eine Orthonormalbasis von* $(V, \tilde{g})$ *gegeben ist. Damit ist ein kanonischer Isomorphismus* $\Psi : Cl(V, g) \to Cl(V, \tilde{g})$ *mit* $e_i \mapsto \tilde{e}_i = \sigma^{-1}e_i$ *definiert.*
2. *Die Darstellungen* $\tilde{\kappa}$ *von* $Cl(V, \tilde{g})$ *und* κ *von* $Cl(V, g)$ *unterscheiden sich nur um einen Skalierungsfaktor, das heißt, daß für die Basisvektoren* $\kappa(e_i) = \tilde{\kappa}(\tilde{e}_i) = \sigma^{-1}\tilde{\kappa}(e_i)$ *gilt.*
3. *Ein Repère* $S(m) = (s_1, \ldots, s_n) \in P_m$ *wird nun wie im ersten Punkt beschrieben mittels* $\Psi_m(v) = \sigma^{-1}(m)v$ *auf das konform geänderte Repère* $\widetilde{S}(m) = (\Psi_m(s_1), \ldots, \Psi_m(s_n)) \in \widetilde{P}_m$ *abgebildet. Durch die Zuordnung* $(m, S(m)) \mapsto (m, \widetilde{S}(m))$ *wird dann ein Isomorphismus* $A : P \to \widetilde{P}$ *zwischen den zusammenhängenden Repèrebündeln* P *von* (M, g) *und* $\widetilde{P}$ *von* $(M, \tilde{g})$ *definiert. Es ist klar, daß für ein lokales Repère* S *und* $B \in SO(n, k)$ *die Gleichung* $[B_m(S_m)]^{\sim} = \widetilde{B}_m(\widetilde{S}_m)$ *gilt. Dabei haben* $\widetilde{B}_m$ *und* B_m *die gleichen Matrixeinträge wenn sie bezüglich konform geänderter Bases betrachtet werden.*

   Die Abbildung A *induziert zwischen den zwei Tangentialbündeln* (TM, g) *und* $(TM, \tilde{g})$ *eine Isometrie* $\widetilde{A}$*, die lokal auf einer offenen Menge* $U \subset M$ *und mit lokalem Repère* S *durch*

   $$\widetilde{A}((S, x_1, \cdots, x_n)) := (\widetilde{S}, x_1, \cdots, x_n) \in \widetilde{P} \times_{SO_+(n,k)} \mathbb{R}^n$$

   gegeben ist, wobei $\widetilde{S}$ *das punktweise mittels* A *konform geänderte Repère bezeichnet. Die Abbildung* $\widetilde{A}$*, mit der die konforme Änderung eines Vektorfeldes* X *beschrieben werden kann, wird häufig auch durch* $\widetilde{X} = \widetilde{A}(X)$ *notiert.*
4. *Die Abbildung* A *und die Spinstruktur* (Q, f) *von* (M, g) *induzieren eine Spinstruktur* $(\widetilde{Q}, \tilde{f})$ *von* $(M, \tilde{g})$*. Dazu wird die Abbildung* $\tilde{f} : Q \to \widetilde{P}$ *durch* $\tilde{f} := A \circ f$ *definiert und* $\widetilde{Q} = Q$ *gesetzt. Dann ist* $\widetilde{Q}$ *eine* λ*-Reduktion des zusammenhängenden Repèrebündels von* $(M, \tilde{g})$*.*

5. *Zu der induzierten $Spin_+(n,k)$-Struktur $(\widetilde{Q},\tilde{f})$ läßt sich das assoziierte Vektorbündel $\widetilde{S} \cong \widetilde{Q} \times_{\tilde{\kappa}} \Delta_{n,k} = Q \times_{\kappa} \Delta_{n,k} = S$ bilden.*
6. *Die Cliffordmultiplikation $\tilde{\mu}$ auf $(TM,\tilde{g}) \times \widetilde{S}$ läßt sich ebenfalls mit der Cliffordmultiplikation μ in $TM \times S$ vergleichen. Es gilt:*
$$\tilde{\mu}(\tilde{x} \otimes \widetilde{\psi}) = \mu((A^{-1}\tilde{x}) \otimes \psi)) =: [\mu(x \otimes \psi)]^{\sim}$$
7. *Sowohl (M,g) als auch $(M,\tilde{g})$ haben einen über die Metrik induzierten Levi-Civita-Zusammenhang ∇ beziehungsweise $\widetilde{\nabla}$. Mit Hilfe der Koszul-Formel*[2] *lassen sich beide kovarianten Ableitungen miteinander vergleichen. Zunächst gilt*
$$\begin{aligned}&\tilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z})\\ &\qquad = \sigma^{-1}g(\nabla_X Y,Z) + Z(\sigma^{-1})g(X,Y) - Y(\sigma^{-1})g(X,Z).\end{aligned}$$
Für die Zusammenhangskoeffizienten folgt
$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\tilde{s}_i}\tilde{s}_j,\tilde{s}_k) = \sigma^{-1}\Gamma^k_{ij} + s_k(\sigma^{-1})\epsilon_i\delta_{ij} - s_j(\sigma^{-1})\epsilon_i\delta_{ik}.$$
Somit folgt für ein lokales Spinorfeld $\Psi \in \Gamma(S)$ und ein beliebiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M,g)$:
$$\begin{aligned}&\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{\Psi} = \sigma^{-1}\widetilde{\nabla_X\Psi}\\ &\qquad + \frac{1}{2}\left[X \cdot grad(\sigma^{-1}) \cdot \Psi + g(grad(\sigma^{-1}),X)\Psi\right]^{\sim}.\end{aligned}$$
Die Diracoperatoren D und $\widetilde{D}$ auf (M,g) beziehungsweise $(M,\tilde{g})$ lassen sich nun lokal miteinander vergleichen:
$$\widetilde{D}\widetilde{\Psi} = \sigma^{-\frac{n+1}{2}}\left[D(\sigma^{\frac{n-1}{2}}\Psi)\right]^{\sim}.$$
8. *Es existiert eine Bijektion zwischen dem Raum der harmonischen Spinoren auf (M,g) und $(M,\tilde{g})$. Ein Isomorphismus zwischen den Räumen der harmonischen Spinoren von $\widetilde{D}$ und D ist durch $\tilde{\psi} \mapsto \sigma^{\frac{n-1}{2}}\psi$ definiert.*

[2] Zur Erinnerung: Für $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ lautet die Koszulformel
$$\begin{aligned}g(\nabla_X Y,Z) = \frac{1}{2}\Big(&X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))\\ &- g(X,[Y;Z]) + g(Y,[Z;X]) + g(Z,[X;Y])\Big).\end{aligned}$$

3.2. **Die Wirkung von $Spin_+(2m,k)$ auf $\Delta_{2m-1,\hat{k}} \oplus \hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}$ und von $Spin_+(2m+1,k)$ auf $\Delta_{2m,\hat{k}}$.**

Die Cliffordalgebra $Cl_{n,k}$ beziehungsweise die Gruppe $Spin_+(n,k)$ wirkt durch die Darstellung κ auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$. Im $\mathbb{R}^{n,k}$ mit orthonormaler Basis $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ ist $\mathbb{R}^{n-1,\hat{k}}$ mit Basis $\{e_i\}_{1\leq i<n}$ eingebettet. Die Cliffordalgebra $Cl_{n-1,\hat{k}}$ ist somit kanonisch in $Cl_{n,k}$ enthalten. Gleiches gilt für $Spin_+(n-1,\hat{k}) \subset Spin_+(n,k)$. Die Wirkung von $Cl_{2m+1,k}$ auf $\mathbb{C}^{2^m}$ läßt sich durch die Wirkung von $Cl_{2m,\hat{k}}$ und eine Abbildung, die die Wirkung von e_{2m+1} beschreibt, ausdrücken, da beide Cliffordalgebren denselben Darstellungsraum haben. Satz 3.2.5 beschreibt diesen Sachverhalt. Für die Algebra $Cl_{2m,k}$ ist die Lage etwas schwieriger, da die Dimensionen der Darstellungsräume von $Cl_{2m,k}$ und $Cl_{2m-1,\hat{k}}$ verschieden sind. Das Dimensionsproblem löst sich aber auf, wenn berücksichtigt wird, daß neben der Darstellung $\kappa_{2m-1,\hat{k}}$ auf $\mathbb{C}^{2^{m-1}}$ noch eine weitere Darstellung $\tilde{\kappa}_{2m-1,\hat{k}}$ auf $\mathbb{C}^{2^{m-1}}$ existiert. Es existiert somit eine „naheliegende“ Darstellung $(\kappa_{2m-1,\hat{k}} \oplus \tilde{\kappa}_{2m-1,\hat{k}}) \circ \mathrm{diag}$ der Algebra $Cl_{2m-1,\hat{k}}$ auf $\mathbb{C}^{2^m} = \mathbb{C}^{2^{m-1}} \oplus \mathbb{C}^{2^{m-1}}$.

Bei den angegebenen Formeln handelt es sich um Übertragungen der im riemannschen Fall gültigen Beziehungen, wie sie in [BFGK91] angegeben sind.

Notation 3.2.1.

1. *Es soll von nun an nicht mehr die strikte Ordnung einer Basis nach dem Kausaltyp der Basisvektoren aus Abschnitt 1.1 gelten. Die Ursache hierfür ist, daß Zerlegungen des Typs $\mathbb{R}^{n-1,k-1} \times \mathbb{R}^{1,1}$ und $\mathbb{R}^{n-1,k} \times \mathbb{R}^{1,0}$ von $\mathbb{R}^{n,k}$ in diesem und im nächsten Kapitel betrachtet werden. Es sei von nun an vereinbart:*
   Wird die Zerlegung $\mathbb{R}^{n,k} = \mathbb{R}^{n-1,k-1} \times \mathbb{R}^{1,1}$ gewünscht, so sind die Vektoren einer Basis stets derartig sortiert, daß die ersten $n-k$ Vektoren raumartig und die folgenden k Vektoren zeitartig sind. Insbesondere ist der letzte Basisvektor zeitartig.
   Wird hingegen eine Zerlegung des Typs $\mathbb{R}^{n,k} = \mathbb{R}^{n-1,k} \times \mathbb{R}^{1,0}$ untersucht, so seien die ersten $n-k-1$ Vektoren einer Basis raumartig, die folgenden k Vektoren zeitartig und der letzte Vektor wiederum raumartig gewählt.
2. *Um die in ersten beiden Punkten auftretenden Fallunterscheidungen nach dem Kausaltyp von e_n gleichzeitig behandeln zu können, sei $\hat{k} = k$, falls e_n raumartig ist, und $\hat{k} = k-1$, falls e_n zeitartig ist. Dann gilt allgemein $\mathbb{R}^{n,k} = \mathbb{R}^{n-1,\hat{k}} \times \mathbb{R}^{1,k-\hat{k}}$, $Cl_{n-1,\hat{k}}$ ist eine Unteralgebra von $Cl_{n,k}$ und $Spin_+(n-1,\hat{k})$ ist eine Untergruppe von $Spin_+(n,k)$.*

Bemerkung 3.2.2. *In Abschnitt 1.1 wurden explizite Realisierungen der komplexen Cliffordalgebren $Cl^c_{n,k}$ als Matrizenalgebren angeben, die* *zur Definition 1.4.2 der Spinordarstellungen κ und $\hat{\kappa}$ führten. In Bemerkung 1.4.6 wurden dann für den Fall $n \geq 2$ Orthonormalbasen bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{C}^{2^m}$ gewählt, die den Spinormodul in positive und negative Spinoren zerlegen. Für $n \equiv 0 \mod 2$ war das gerade die Zerlegung in positive und negative Weylspinoren. In diesem Fall ist die Zerlegung Spin-invariant. Weiterhin sei bemerkt, daß sich für $n \geq 2$ jeder Spinor $v \in \Delta_{n,k}$ als (eindeutige) Summe eines negativen Spinors $v^- \in \Delta^-_{n,k}$ und eines positiven Spinors $v^+ \in \Delta^+_{n,k}$ schreiben läßt.*

Definition 3.2.3. *Durch $v = (v^+, v^-) \mapsto (v^+, -v^-) =: \urcorner(v)$ ist die Involution $\urcorner : \Delta_{n,k} \to \Delta_{n,k}$ gegeben, falls $n \geq 2$ gilt. Für den Fall $n = 1$ sei $\urcorner : \Delta_{1,k} \to \Delta_{1,k}$ als $-\mathrm{Id}_{\Delta_{1,k}}$ definiert.*

Bemerkung 3.2.4. *Im Fall ungerader Dimension $2m-1$ ist $\urcorner$ ein Isomorphismus der Spindarstellungen κ und $\hat{\kappa}$. Insbesondere antikommutiert $\urcorner$ mit den beiden durch diese Darstellungen definierten Cliffordmultiplikationen:*

$$\urcorner(x \cdot v) = \urcorner(\kappa(x)v) = -\hat{\kappa}(x)\urcorner(v) = -x \hat{\cdot} \urcorner(v)$$

Für $2m-1 = 1$ gilt $\urcorner(x \cdot v) = x \hat{\cdot} v$.

Als nächstes wird die Darstellung der $(2m+1)$-dimensionalen Cliffordalgebra aus Bemerkung 1.1.6 mit Hilfe der Darstellung der $2m$-dimensionalen Cliffordalgebra und der soeben eingeführten Abbildung $\urcorner$ beschrieben. Die Konstante τ_i nimmt für raumartiges e_i den Wert 1 und für zeitartiges e_i den Wert i an.

Satz 3.2.5. *Die Darstellung κ der Cliffordalgebra $Cl_{2m+1,k}$ ist durch die Wirkung der Cliffordalgebra $Cl_{2m,\hat{k}}$ und die Abbildung $\urcorner$ induziert. Es gilt genauer:*

$$\kappa_{2m+1,k}(e_j) = \begin{cases} \kappa_{2m,\hat{k}}(e_j), & \text{falls } 1 \leq j \leq 2m \\ (-1)^m i \tau_{2m+1} \urcorner(v), & \text{falls } j = 2m+1. \end{cases}$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Definition der Darstellungen der Cliffordalgebren. Es bleibt, die Wirkung des Basisvektors e_{2m+1} auf $\Delta_{2m,\hat{k}}$ nachzuweisen.
Wegen $\kappa(e_{2m+1}) = \tau_{2m+1} i \bigotimes_m T$ und $Tu(\nu) = -\nu \cdot u(\nu)$ folgt:

$$\begin{aligned} (\otimes_m T)\,(u(\nu_1, \dots, \nu_m)) &= (-1)^m (\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_m) u(\nu_1, \dots, \nu_m) \\ &= \begin{cases} (-1)^m u(\nu_1, \dots, \nu_m), & \text{falls } u(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \Delta^+ \\ (-1)^{m+1} u(\nu_1, \dots, \nu_m), & \text{falls } u(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \Delta^-. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist durch

$$\begin{aligned} e_{2m+1} \cdot v = e_{2m+1} \cdot (v^+, v^-) &= i(-1)^m \tau_{2m+1} (v^+, -v^-) \\ &= (-1)^m i \tau_{2m+1} \urcorner(v) \end{aligned}$$

die Wirkung von e_{2m+1} auf $v \in \Delta_{2m,\hat{k}}$ gegeben. □

Korollar 3.2.6. *Die Wirkung der Gruppe* $Spin_+(2m+1,k)$ *auf* $\Delta_{2m,\hat{k}}$ *kann durch die Darstellung* κ *der Cliffordalgebra* $Cl_{2m,\hat{k}}$ *und die Wirkung von* e_{2m+1} *auf* $v=(v^+,v^-)\in\Delta_{2m,\hat{k}}$*, die durch*

$$e_{2m+1}\cdot v=(-1)^m i\tau_{2m+1}\urcorner(v)$$

gegeben ist, beschrieben werden.

Da die komplexen Dimensionen von $\Delta_{2m,k}$ und $\Delta_{2m-1,\hat{k}}$ verschieden sind, ist es nicht möglich, die Darstellung der Cliffordalgebra $Cl_{2m,k}$ mittels der Darstellung von $Cl_{2m-1,\hat{k}}$ und der Abbildung $\urcorner$ wie eben zu beschreiben. Zunächst gilt

$$\Delta_{2m,k}=\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2^{m-1}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\mathbb{C}^{2^{m-1}}\oplus\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\mathbb{C}^{2^{m-1}}=\mathbb{C}^{2^{m-1}}\oplus\mathbb{C}^{2^{m-1}}.$$

Die Realisierung der komplexen Cliffordalgebra Cl^c_{2m-1} als Matrizenalgebra in Abschnitt 1.1 ist isomorph zu $\mathbb{C}(2^{m-1})\oplus\mathbb{C}(2^{m-1})$. Die Cliffordalgebra Cl^c_{2m-1} liegt in Cl^c_{2m}, es wird wieder der letzte Basisvektor e_{2m} „vergessen“. Dadurch ist eine Darstellung aller Elemente der Cliffordalgebra Cl^c_{2m}, die e_n nicht enthalten, auf $\mathbb{C}^{2^{m-1}}\oplus\mathbb{C}^{2^{m-1}}$ gegeben. Die Darstellung auf dem ersten Summanden ist dabei κ_{2m-1} und auf dem zweiten Summanden $\hat{\kappa}_{2m-1}$. Es muß nur noch die Wirkung von e_{2m} auf $\Delta_{2m-1,\hat{k}}\oplus\hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}$ bestimmt werden, die der Wirkung $\kappa_{2m,k}(e_{2m})$ auf $\Delta_{2m-1,\hat{k}}\oplus\hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}$ gemäß der Identifizierung $\Delta_{2m,k}=\Delta_{2m-1,\hat{k}}\oplus\hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}$ entspricht.

Satz 3.2.7. *Die Darstellung* κ *der reellen Cliffordalgebra* $Cl_{2m,k}$ *wird durch die Abbildung* $\urcorner$ *und die Darstellung*

$$(\kappa_{2m-1,\hat{k}}\oplus\hat{\kappa}_{2m-1,\hat{k}})\circ\operatorname{diag}:Cl_{2m-1,\hat{k}}\to\Delta_{2m-1,\hat{k}}\oplus\hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}$$

von $Cl_{2m-1,\hat{k}}$ *induziert. Genauer gilt für* $(v_1,v_2)\in\mathbb{C}^{2^{m-1}}\oplus\mathbb{C}^{2^{m-1}}$*:*

$$\kappa_{2m,k}(e_j)(v_1,v_2)=\begin{cases}\Big(\kappa_{2m-1,\hat{k}}(e_j)(v_1),\hat{\kappa}_{2m-1,\hat{k}}(e_j)(v_2)\Big), & 1\le j<2m\\ (-1)^{m-1}i\tau_{2m}\left(\urcorner(v_2),\urcorner(v_1)\right), & j=2m\neq 2\\ i\tau_2\left(v_2,v_1\right), & j=2m=2.\end{cases}$$

Beweis. Die Behauptung für e_i mit $1\le i<2m$ ist eine direkte Konsequenz der Darstellung der Cliffordalgebra $Cl^c_{2m-1,\hat{k}}$. Es bleibt, die Wirkung des $2m$-ten Basisvektors auf $\mathbb{C}^{2^{m-1}}\oplus\mathbb{C}^{2^{m-1}}$ nachzuweisen. Ist $m=1$, so folgt die Behauptung wegen

$$\kappa_{2,k}(e_2)(v_1,v_2)=\tau_2U_2(v_1,v_2)=\tau_2(iv_2,iv_1)=i\tau_2(v_2,v_1).$$

Für $m > 1$ gilt $\kappa(e_{2m}) = \tau_{2m} U_2 \otimes (\otimes_{m-1} T)$, was für $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} U_2 \otimes (\otimes_{m-1} T) \left(\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \otimes u(\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \right) \\ &= i \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \otimes \left((\otimes_{m-1} T) u(\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \right) \\ &= i(-1)^{m-1} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \otimes \daleth(u(\nu_1, \ldots, \nu_{m-1})) \end{aligned}$$

impliziert. Diese Rechnung liefert für $v = (v_1, v_2) \in \Delta_{2m-1,\hat{k}} \oplus \hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}$ die Wirkung $e_{2m} \cdot v = i(-1)^{m-1} \tau_{2m} \left(\daleth(v_2), \daleth(v_1) \right)$. $\square$

Korollar 3.2.8. *Die Wirkung der Gruppe* $Spin_+(2m, k)$ *auf* $\Delta_{2m,k}$ *beziehungsweise* $\Delta_{2m-1,\hat{k}} \oplus \hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}$ *ist durch die Wirkung*

$$(\kappa_{2m-1,\hat{k}} \oplus \hat{\kappa}_{2m-1,\hat{k}}) \circ \mathrm{diag}$$

von $Cl_{2m-1,\hat{k}}$ *und die Wirkung*

$$e_{2m} \cdot (v_1, v_2) = \begin{cases} i(-1)^{m-1} \tau_{2m} \left(\daleth(v_2), \daleth(v_1) \right), & \textit{falls } m \neq 1 \\ i\tau_2 \left(v_2, v_1 \right), & \textit{falls } m = 1 \end{cases}$$

für $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^{2^{m-1}} \oplus \mathbb{C}^{2^{m-1}}$ *gegeben.*

3.3. **Kodimension-1-Formalismus.**
Ist in $M^{n,k}$ eine Untermannigfaltigkeit $F^{n-1,\hat{k}}$ gegeben, die beide miteinander verträglich raum- und zeitartig orientiert seien, so kann auf F der im letzten Abschnitt beschriebene Fall wiedergefunden werden: Sei auf F ein global definiertes Vektorfeld X mit der Eigenschaft, daß sich jede positiv orientierte Orthonormalbasis von T_pF zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis von T_pM durch Hinzufügen von $X(p)$ erweitern läßt. Dann treten die ineinanderliegenden Cliffordalgebren $Cl_{n-1,\hat{k}}$ und $Cl_{n,k}$ zwangsläufig auf. Insbesondere induziert eine Spinstruktur von M nach Wahl eines solchen Vektorfeldes eine Spinstruktur auf F. Zu F und M können dann Spinorbündel S_F und S_M assoziiert werden. Wird S_M auf F eingeschränkt so, stellt sich die Frage ob beziehungsweise wie beide Bündel vergleichbar sind. Die Sätze 3.3.5 und 3.3.6 beantworten diese Frage positiv. Auch in diesem Fall handelt es sich um Verallgemeinerungen des riemannschen Falls, der in [BFGK91] beschrieben wird.

Bemerkung 3.3.1. *Unter $(F^{n-1,\hat{k}}, h)$ wird eine raum- und zeitartig orientierte Untermannigfaltigkeit von $(M^{n,k}, g)$ der Kodimension 1 mit induzierter Metrik verstanden, wobei $\hat{k} \in \{k, k-1\}$ den (konstanten) Index angibt. Mit den Orientierungen von M und F läßt sich auf F ein nirgendwo verschwindendes und auf 1 oder -1 normiertes Normalenfeld X definieren, so daß für alle $p \in F$ und positiv orientierten Basen $(e_1, \dots, e_{n-1})$ von T_pF die Basis $(e_1, \dots, e_{n-1}, X(p))$ in T_pM positiv orientiert ist. Auf diese Art läßt sich das zusammenhängende Repèrebündel P_F von F als Reduktion auf $SO(n-1, \hat{k})$ des $SO(n,k)$-Hauptfaserbündels $P_{|F}$ und als Teilbündel von $P_{|F}$ auffassen, bei dem es sich um die Einschränkung auf den Basisraum $F \subset M$ des zusammenhängenden Repèrebündels P_M von M handelt. Diese Reduktion existiert, da das Normalenvektorfeld X auf F global definiert und F raum- und zeitartig orientierbar ist.*

Eine Spinstruktur (Q, f) von M induziert nun auf F eine Spinstruktur (Q_F, f_F). Dazu sei zunächst $Q_{|F} := f^{-1}(P_{|F})$ und $f_{|F}$ die Einschränkung von f auf $Q_{|F}$. Gemäß obiger Identifizierung wird nun P_F als ein Teilbündel von $P_{|F}$ aufgefaßt und etwas lax können nun $Q_F := f^{-1}(P_F)$ und $f_F = (f_{|F})_{|Q_F}$ definiert werden. Insbesondere kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Q_F & \longrightarrow & Q_{|F} & \longrightarrow & Q_M \\ {\scriptstyle f_F}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_{|F}}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ P_F & \longrightarrow & P_{|F} & \longrightarrow & P_M. \end{array}$$

Das zur Spinstruktur (Q_F, f_F) und der Darstellung $\kappa_{n-1,\hat{k}}$ assoziierte Spinorbündel wird mit $S_F = Q_F \times_{Spin_+(n-1,\hat{k})} \Delta_{n-1,\hat{k}}$ bezeichnet. Wird in ungeraden Dimensionen statt κ die Darstellung $\hat{\kappa}$ benutzt, so ist das assoziierte Spinorbündel mit $\hat{S}_F$ bezeichnet. Neben $P_{|F}$ werden auch $Q_{|F}$

und $S_{|F}$ über F betrachtet, die Einschränkungen der Bündel Q_M und $S_M = Q_M \times_{Spin_+(n,k)} \Delta_{n,k}$ auf F sind.

Satz 3.3.2. *Für* $\dim\ M^{n,k} = 2m+1$ *sind die Bündel S_F und $S_{|F}$ isomorph. Die Cliffordmultiplikation eines Spinors $\varphi \in \Gamma(S_F)$ mit dem Normalenvektorfeld X_ξ ist*

$$X_\xi \cdot \varphi = (-1)^m i\tau_{2m+1} \urcorner(\varphi).$$

Beweis. Die Isomorphie der Vektorbündel gilt auf Grund der Identifizierung von Q_F mit einer Reduktion von $Q_{|F}$ ist, und der Gleichung $\dim\ \Delta_{2m+1} = \dim\ \Delta_{2m}$. Das Vektorbündel S_F ist dann isomorph zu einer Reduktion von $S_{|F}$. Unter der Reduktion eines assoziierten Vektorbündels wird dabei das assoziierte Vektorbündel des reduzierten Hauptfaserbündels verstanden, beide assoziierten Bündel sind bekanntlich isomorph. Die Formeln über die Cliffordmultiplikation sind eine Konsequenz aus Korollar 3.2.6. □

Satz 3.3.3. *Gilt* $\dim\ M^{n,k} = 2m$, *so sind $S_{|F}$ und $S_F \oplus \hat{S}_F$ isomorph. Wird ein Spinorfeld $(\varphi_1, \varphi_2) \in \Gamma(S_F \oplus \hat{S}_F)$ betrachtet, so ist die Cliffordmultiplikation mit dem Normalenvektorfeld X_ξ aufzufassen als:*

$$X_\xi \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} (-1)^{m-1} i\tau_{2m}(\urcorner(\varphi_2), \urcorner(\varphi_1)), & m \neq 1 \\ i\tau_2(\varphi_2, \varphi_1), & m = 1. \end{cases}$$

Beweis. Dies folgt ebenfalls aus der Isomorphie von Q_F zu einer Reduktion von $Q_{|F}$ und $\Delta_{2m,k} = \Delta_{2m-1,\hat{k}} \oplus \hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}$:

$$\begin{aligned} S_{|F} &= Q_{|F} \times_{Spin_+(n,k)} \Delta_{2m,k} \cong Q_F \times_{Spin_+(n-1,\hat{k})} (\Delta_{2m-1,\hat{k}} \oplus \hat{\Delta}_{2m-1,\hat{k}}) \\ &\cong S_F \oplus \hat{S}_F. \end{aligned}$$

Die Behauptungen über die Cliffordmultiplikation folgen mit Korollar 3.2.8. □

Für den Rest des Abschnitts sei $\{s_i\}$ ein positiv orientiertes lokales Repère von F, so daß $(s_1, \dots, s_{n-1}, X)$ ein lokales positiv orientiertes Repère von M entlang F ist. Der Vektor $X(p)$ wird also stets als n-ter Basisvektor einer Basis von T_pM für $p \in F$ aufgefaßt.

Lemma 3.3.4. *Bezüglich der kovarianten Ableitung auf M gilt*

$$\Gamma^n_{in} = 0 \qquad \textit{und} \qquad \Gamma^n_{ik} = -\Gamma^k_{in}.$$

Beweis. Es handelt sich in beiden Fällen um Folgerungen aus der Tatsache, daß der Zusammenhang metrisch ist:

$$\begin{aligned} \Gamma^n_{in} &= g(\nabla_{e_i} X, X) = \frac{1}{2}\left(g(\nabla_{e_i} X, X) + g(X, \nabla_{e_i} X)\right) = 0, \\ \Gamma^n_{ik} &= g(\nabla_{e_i} e_k, X) = e_i\big(g(e_k, X)\big) - g(e_k, \nabla_{e_i} X) = 0 - \Gamma^k_{in} = -\Gamma^k_{in}. \end{aligned}$$

□

Satz 3.3.5. *Für* dim $M^{n,k} = 2m+1$ *gilt zwischen den kovarianten Ableitungen* $\nabla^{S_{|F}}$ *im Spinorbündel* $S_{|F}$ *und* ∇^{S_F} *in* S_F *die Beziehung:*

$$\nabla_X^{S_{|F}}\varphi = \nabla_X^{S_F}\varphi + (-1)^{m+1}\frac{i\tau_n\epsilon_n}{2}(\nabla_Y^M X)\cdot \urcorner(\varphi)$$

wobei $Y \in \mathfrak{X}(F)$ *und* $\varphi \in \Gamma(S_{|F}) \cong \Gamma(S_F)$ *gilt.*

Beweis. Sei $Y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i s_i \in \mathfrak{X}(F)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_Y^{S_{|F}}\varphi &= Y(\varphi) + \frac{1}{2}\sum_{k<l}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla_Y^M s_k, s_l)s_k\cdot s_l\cdot\varphi \\
&= Y(\varphi) + \frac{1}{2}\sum_{k<l<n}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla_Y^M s_k, s_l)s_k\cdot s_l\cdot\varphi \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{k<n}\epsilon_k\epsilon_n g(\nabla_Y^M s_k, s_n)s_k\cdot s_n\cdot\varphi \\
&= \nabla_Y^{S_F}\varphi + \frac{1}{2}\sum_{k<n}\epsilon_k\epsilon_n(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\Gamma_{ik}^n)s_k\cdot X\cdot\varphi \\
&= \nabla_Y^{S_F}\varphi - \frac{1}{2}\sum_{k<n}\epsilon_k\epsilon_n(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\Gamma_{in}^k)s_k\cdot X\cdot\varphi \\
&= \nabla_Y^{S_F}\varphi - \frac{1}{2}\sum_{k\leq n}\epsilon_k\epsilon_n g(\nabla_Y^M X, s_k)s_k\cdot X\cdot\varphi \\
&= \nabla_Y^{S_F}\varphi - \frac{\epsilon_n}{2}(\nabla_Y^M X)\cdot X\cdot\varphi.
\end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung mit Satz 3.3.2. □

Satz 3.3.6. *Für* dim $M^n = 2m > 2$ *gilt für die kovarianten Ableitungen* $\nabla^{S_{|F}}$ *im Spinorbündel* $S_{|F}$ *und* $(\nabla^{S_F}, \nabla^{\hat{S}_F})$ *in* $S_F \oplus \hat{S}_F$

$$\nabla_Y^{S_{|F}}\varphi = (\nabla_Y^{S_F}\varphi_1, \nabla_Y^{\hat{S}_F}\varphi_2) + (-1)^m\frac{i\tau_n\epsilon_n}{2}(\nabla_Y^M X)\cdot(\urcorner(\varphi_2), \urcorner(\varphi_1)),$$

wobei $Y \in \mathfrak{X}(F)$ *und* $\varphi \in \Gamma(S_{|F})$ *und* $\varphi \cong (\varphi_1, \varphi_2) \in \Gamma(S_F \oplus \hat{S}_F)$ *seien. Ist* dim $M^n = 2$, *so gilt*

$$\nabla_Y^{S_{|F}}\varphi = (\nabla_Y^{S_F}\varphi_1, \nabla_X^{\hat{S}_F}\varphi_2) - \frac{i\tau_2\epsilon_2}{2}(\nabla_Y^M X)\cdot(\varphi_2, \varphi_1).$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem des vorherigen Satzes unter Verwendung von Satz 3.3.3. □

3.4. Spinorbündel auf den Produkträumen $B_\sigma\times\mathbb{R}$ und $B\times_\sigma\mathbb{R}$.

Wurde im letzten Abschnitt eine Untermannigfaltigkeit F der Kodimension 1 in M betrachtet und die assoziierten Spinorbündel $S_{|F}$ und S_F miteinander verglichen, so ist das Vorgehen in diesem Abschnitt entgegengesetzt. Ausgehend von einer semiriemannschen Spinmannigfaltigkeit (B,g) wird das Produkt $B\times\mathbb{R}$ betrachtet. Ist auf $B\times\mathbb{R}$ eine Metrik gegeben, die mit der Produktmetrik in Beziehung steht, also beispielsweise eine Warped-Produktmetrik ist, so werden auf $B_\sigma\times\mathbb{R}$ eine Spinstruktur und ein Spinorbündel derartig definiert, daß die in letzten Abschnitt beschriebenen Beziehungen für alle $t\in\mathbb{R}$ auf $F=B\times\{t\}$ mit induzierter Metrik gelten. Wichtig ist hierbei, daß ein auf $B\times\mathbb{R}$ global definiertes Vektorfeld in „$\mathbb{R}$-Richtung“ existiert. Bei den betrachteten Räumen handelt es sich entweder um $(B,g)\times(\mathbb{R},\pm\sigma^{-2}(t)\,\mathrm{dt}^2)$ oder um das Warped-Produkt $(B\times\mathbb{R},\sigma^2(t)g\pm\mathrm{dt}^2)$. Der Fall des Warped-Produkts wird je nach Dimension von B in den Sätzen 3.4.7 und 3.4.8 beschrieben. In Satz 3.4.9 wird die andere Metrik beschrieben. Da alle Sätze prinzipiell gleich bewiesen werden, ist nur der erste Fall ausführlich beschrieben. Für Satz 3.4.8 werden lediglich die (minimalen) Unterschiede geschildert, während auf einen expliziten Beweis des letzten Satzes verzichtet wird.

Bemerkung 3.4.1. *Von nun an bezeichnet $(B^{n-1,\hat{k}},h)$ stets eine raum- und zeitartig orientierbare semiriemannsche Spinmannigfaltigkeit mit gewählter Spinstruktur (Q_B,f_B).*

Definition 3.4.2. *Unter dem Warped-Produkt $B_\sigma\times\mathbb{R}$ von (B,h) mit $\mathbb{R}$ und der Warping-Funktion σ wird die mit der Metrik $g:=\sigma^2h\oplus\epsilon_n\,\mathrm{dt}^2$ versehene Produktmannigfaltigkeit $M^{n,k}\ :=\ B\ \times\ \mathbb{R}$ verstanden.*

Statt $B_\sigma\times\mathbb{R}$ wird auch die konform-äquivalente Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}=B\times_\sigma\mathbb{R}$ mit der Metrik $\tilde{g}=(h\oplus\epsilon_n\sigma^{-2}\,\mathrm{dt}^2)$ betrachtet.

Als Blatt wird B bezeichnet, während $\mathbb{R}$ (oder die $\mathbb{R}$ ersetzende Mannigfaltigkeit) Faser genannt wird.

Bemerkung 3.4.3. *Auf dem direkten Produkt $\widetilde{M}=B\times_\sigma\mathbb{R}$ werden durch die Projektionsabbildung $\pi_{\widetilde{M}}:B\times_\sigma\mathbb{R}\to B$ von B zurückgezogene Bündel induziert. Ist beispielsweise P_B das Bündel der positiv orientierten Orthonormalrepère von B und $\pi_{P_B}:P_B\to B$ die zugehörige Projektion, so ist $\pi^*_{\widetilde{M}}P_B$ ein $SO_+(n-1,\hat{k})$-Hauptfaserbündel über $\widetilde{M}$. Nun läßt sich $\pi^*_{\widetilde{M}}P_B$ zu einem $SO_+(n,k)$-Hauptfaserbündel mit Totalraum $P_{\widetilde{M}}=\pi^*_{\widetilde{M}}P_B\times_{SO_+(n-1,\hat{k})}SO_+(n,k)$ erweitern. Ein Punkt in diesem Bündel entspricht einer Äquivalenzklasse $[(b,t,A),B]$ mit Repräsentant $(((b,t),A),B)$. Dabei sind $(b,t)\in B\times\mathbb{R}$, $A\in\pi^{-1}_{P_B}(b)\subset P_B$ und $B\in SO_+(n,k)$.*

Die Spinstruktur (Q_B,f_B) induziert ein $Spin_+(n,k)$-Hauptfaserbündel mit Totalraum $Q_{\widetilde{M}}=\pi^*_{\widetilde{M}}Q_B\times_{Spin_+(n-1,\hat{k})}Spin_+(n,k)$ auf $\widetilde{M}$. Ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[(b,t,u),v]$ ist $(((b,t),u),v)$, wobei

$(b,t) \in B \times \mathbb{R}$, $u \in f_B^{-1}(b) \subset Q_B$ und $v \in Spin_+(n,k)$ sind. Eine Spinstruktur $(Q_{\widetilde{M}}, f_{\widetilde{M}})$ auf $\widetilde{M}$ wird nun durch die Abbildung $f_{\widetilde{M}} : Q_{\widetilde{M}} \to P_{\widetilde{M}}$ mit $[(b,t,u),v] \mapsto [(b,t,f_B(u)),\lambda(a)]$ definiert. Das Spinorbündel auf $\widetilde{M}$ zur Spinstruktur (Q_M, f_M) ist dann $S_{\widetilde{M}} = Q_{\widetilde{M}} \times_{Spin_+(n,k)} \Delta_{n,k}$.

Durch konforme Änderung werden nun ein $SO_+(n,k)$-Hauptfaserbündel, eine Spinstruktur und ein assoziiertes Spinorbündel auf dem Warped-Produkt M konstruiert.

Beispiel 3.4.4. *Ist $\epsilon_n = -1$ und $\hat{k} = 0$, so ist $\widetilde{M} = B \times_\sigma \mathbb{R}$ insbesondere eine Spin-Lorentzmannigfaltigkeit. Dann kann $\pi^*_{\widetilde{M}} P_B$ mit einer Reduktion auf eine maximal kompakte Untergruppe des zusammenhängenden Repèrebündels P von $\widetilde{M}$ identifiziert werden. Dabei wird beispielsweise auf die maximal kompakte Untergruppe $SO(n-1)$ von $SO(n,1)$ nach Wahl des globalen zeitartigen Vektorfeldes $X_\xi(b,t) = \sigma(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ reduziert.*

Notation 3.4.5.

- *Für einen glatten Schnitt $\varphi \in \Gamma(S_M)$ und festes $t \in \mathbb{R}$ bezeichnet φ_t das Spinorfeld $\varphi_t(b) := \varphi(b,t) \in \Gamma((S_M)_{|B_t})$.*

  Wegen der konformen Äquivalenz von B_t mit B können Spinoren über B_t als Spinoren über B und umgekehrt aufgefaßt werden. Ebenso kann ein Spinorfeld φ über B zu einem Spinorfeld $\tilde{\varphi}$ über M erweitert werden. Die Erweiterung ist so gewählt, daß der Spinor $(\tilde{\varphi})_t$ gemäß der konformen Äquivalenz von B_t und B zu φ transformiert. Die Identifizierungen werden durch

  $$\varphi \in \Gamma(S_B) \mapsto (\tilde{\varphi})_t \in \Gamma(S_{B_t}) \mapsto \overline{(\tilde{\varphi})_t} \in \Gamma(S_B)$$

  notiert. Dabei ist aus dem Kontext ersichtlich, daß es sich bei $\overline{(\tilde{\varphi})_t}$ nicht um komplex Konjugation handelt.
- *Ist $X \in \mathfrak{X}(B)$, so ist unter $\widetilde{X}$ das Vektorfeld auf M zu verstehen, das durch $\widetilde{X}(x,t) := \sigma^{-1}(t)X(x)$ gegeben ist. Für fixiertes t und beliebiges $b \in B$ ist das Vektorfeld $(\widetilde{X})_t(b) := \widetilde{X}(b,t)$ auf B_t gegeben. Ebenso wird $(\widetilde{X})_t \in \mathfrak{X}(B_t)$ mit $\overline{(\widetilde{X})_t} = \sigma(t)(\widetilde{X})_t \in \mathfrak{X}(B)$ identifiziert.*
- *Die beiden Vektorfelder X_η und $\widetilde{X}_\eta$ in Faserrichtung seien durch $X_\eta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \in \mathfrak{X}(B_\sigma \times \mathbb{R})$ und $\widetilde{X}_\eta = \sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \in \mathfrak{X}(B \times_\sigma \mathbb{R})$ gegeben. Sie sind auf den entsprechenden Mannigfaltigkeiten auf ± 1 normiert.*

Satz 3.4.6. *Es sei $\{s_i\}$ ein Repère auf $U \subset B$ und $X \in \mathfrak{X}(B)$. Dann sind $(\tilde{s}_i)_t$ und $(\widetilde{X})_t$ für alle t tangential an $U \times \{t\} \subset B_t$. Es folgt für den Levi-Civita-Zusammenhang auf M und $\widetilde{M}$:*

1. $g(\nabla^M_{\widetilde{X}} \tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = \frac{1}{\sigma} h(\nabla^B_X s_i, s_j)$
2. $g(\nabla^M_{\widetilde{X}} \tilde{s}_i, X_\eta) = -\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} h(s_i, X)$
3. $g(\nabla^M_{X_\eta} \tilde{s}_i, X_\eta) = g(\nabla^M_{X_\eta} \tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = 0$

4. $\tilde{g}(\nabla^{\widetilde{M}}_{\widetilde{A}(\widetilde{X})}\widetilde{A}(\tilde{s}_i), \widetilde{X}_\eta) = 0.$

   Hierbei ist $\widetilde{A} : TM \to T\widetilde{M}$ die in Bemerkung 3.1.1 beschriebene Isometrie.

Beweis. Die erste Behauptung gilt, da σ auf B_t konstant ist:

$$g(\nabla^M_{\widetilde{X}}\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = \sigma^2 h\Big(\nabla^B_{(\sigma^{-1}X)}(\sigma^{-1}s_i), (\sigma^{-1}s_j)\Big) = \frac{1}{\sigma}h(\nabla^B_X s_i, s_j).$$

Unter Benutzung der Koszulformel folgt die zweite Behauptung:

$$\begin{aligned} g(\nabla^M_{\widetilde{X}}\tilde{s}_i, X_\eta) &= \frac{1}{2}\Big(\widetilde{X}(g(\tilde{s}_i, X_\eta)) + \tilde{s}_i(g(X_\eta, \widetilde{X})) + X_\eta(g(\widetilde{X}, \tilde{s}_i)) \\ &\qquad - g(\widetilde{X}, [\tilde{s}_i; X_\eta]) + g(\tilde{s}_i; [X_\eta; \widetilde{X}]) + g(X_\eta, [\widetilde{X}; \tilde{s}_i])\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(-g(\widetilde{X}, \nabla^M_{\tilde{s}_i}X_\eta - \nabla^M_{X_\eta}\tilde{s}_i) + g(\tilde{s}_i, \nabla^M_{X_\eta}\widetilde{X} - \nabla^M_{\widetilde{X}}X_\eta)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(g(\widetilde{X}, \nabla^M_{X_\eta}\tilde{s}_i) + g(\tilde{s}_i, \nabla^M_{X_\eta}\widetilde{X})\Big) \\ &= \frac{\sigma}{2}\Big(h(X, -\frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2}s_i) + h(s_i, -\frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2}X)\Big) = -\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}h(X, s_i). \end{aligned}$$

Die dritte Behauptung folgt mit $\nabla^M_{\tilde{s}_i}X_\eta = 0$ und $\nabla^M_{X_\eta}\tilde{s}_i = -\frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2}\tilde{s}_i$ aus der Koszulformel. Die vierte Behauptung wird unter Berücksichtigung von $\nabla^{\widetilde{M}}_{\widetilde{A}(\tilde{s}_i)}\widetilde{X}_\eta = 0$ und $\nabla^{\widetilde{M}}_{\widetilde{X}_\eta}\widetilde{A}(\widetilde{X}) = 0$ wie die zweite bewiesen. $\square$

Satz 3.4.7. *Gilt* $\dim B^{n-1,\hat{k}} = 2m$*, so folgt für die kovariante Ableitung im Spinorbündel S_M von M im Punkt (b,t):*

$$\nabla^{S_M}_X\varphi = \frac{1}{\sigma(t)}\Big([\nabla^{S_B}_{\bar{X}_t}\bar{\varphi}_t]^{\sim} + (-1)^{m+1}\frac{i\tau_n\epsilon_n}{2}\dot{\sigma}(t)X_t \cdot \urcorner(\varphi_t)\Big),$$

$$\nabla^{S_M}_{X_\eta}\varphi = \dot{\varphi}.$$

Dabei bezeichnet $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein am Blatt B_t tangential anliegendes Vektorfeld und φ einen Schnitt in S_M.

Beweis. Da X tangential an $B_t \subset M$ liegt, folgt mit Satz 3.3.5 und $(S_M)_{|B_t} \cong S_{B_t}$

$$\nabla^{S_M}_X\varphi = \nabla^{(S_M)_{|B_t}}_{X_t}\varphi_t = \nabla^{S_{B_t}}_{X_t}\varphi_t + (-1)^{m+1}\frac{i\tau_n\epsilon_n}{2}(\nabla^M_{X_t}X_\eta) \cdot \urcorner(\varphi_t).$$

Da weiterhin B_t und B konform-äquivalent sind, folgt mit dem siebten Punkt der Bemerkung 3.1.1

$$\begin{aligned} \nabla^{S_{B_t}}_{X_t}\varphi_t = \frac{1}{\sigma(t)}&\Big[\nabla^{S_B}_{\bar{X}_t}\bar{\varphi}_t\Big]^{\sim} \\ &+ \frac{1}{2}\Big[X_t \cdot \mathrm{grad}(\frac{1}{\sigma(t)}) \cdot \varphi_t + g_{(b,t)}(\mathrm{grad}(\frac{1}{\sigma(t)}), X_t)\varphi_t\Big]^{\sim}. \end{aligned}$$

Auf jedem Blatt B_t ist σ konstant. Da der Gradient lediglich auf dem Blatt B_t zu bilden ist, folgt, daß der zweite Summand verschwindet. Insgesamt gilt daher

$$\nabla_X^{S_M}\varphi = \frac{1}{\sigma(t)}\left[\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B}\bar{\varphi}_t\right]^{\sim} + (-1)^{m+1}\frac{i\tau_n\epsilon_n}{2}(\nabla_{X_t}^M X_\eta)\cdot \urcorner(\varphi_t).$$

Nun genügt es, $\nabla_{X_t}^M X_\eta = \frac{\dot\sigma(t)}{\sigma(t)}X_t$ nachzuweisen. Dies geschieht mit Satz 3.4.6 und Lemma 3.3.4:

$$g(\nabla_{X_t}^M X_\eta, s_j) = \sum x_i\Gamma_{i\eta}^j = -\sum x_i\Gamma_{ij}^\eta = -g(\nabla_{X_t}^M s_j, X_\eta) = \frac{\dot\sigma}{\sigma}h(s_j, X_t).$$

Die zweite Behauptung wird unter Verwendung von $\nabla_{X_\eta}^M \tilde{s}_k = 0$ aus Satz 3.4.6 bewiesen:

$$\nabla_{X_\eta}^S\varphi = X_\eta(\varphi) + \frac{1}{2}\sum_{k<l}\epsilon_k\epsilon_l g(\nabla_{X_\eta}^M s_k, s_l)s_k\cdot s_l\cdot\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\varphi) = \dot\varphi.$$

□

Satz 3.4.8. *Für* dim $B^{n-1,\hat{k}} = 2m-1 \geq 3$ *gilt für die kovariante Ableitung im Spinorbündel* S_M *im Punkt* (b,t)*:*

$$\nabla_X^{S_M}\varphi = \frac{1}{\sigma(t)}\left[(\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B}\bar{\varphi}_{t1}, \nabla_{\bar{X}_t}^{\hat{S}_B}\bar{\varphi}_{t2})\right]^{\sim} + (-1)^m\frac{i\tau_n\epsilon_n\dot\sigma(t)}{2\sigma(t)}X_t\cdot(\urcorner\varphi_{t2}, \urcorner\varphi_{t1}),$$

$$\nabla_{X_\eta}^{S_M}\varphi = \dot\varphi.$$

Dabei ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ *ein am Blatt* B_t *tangential anliegendes Vektorfeld und* $\varphi \in \Gamma(S_M)$ *mit* $\varphi_t = (\varphi_{t1}, \varphi_{t2}) \in \Gamma(S_{B_t} \oplus \hat{S}_{B_t})$*.*

Ist B *eindimensional, so gilt neben* $\nabla_{X_\eta}^{S_M}\varphi = \dot\varphi$ *noch*

$$\nabla_X^{S_M}\varphi = \frac{1}{\sigma(t)}\left[(\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B}\bar{\varphi}_{t1}, \nabla_{\bar{X}_t}^{\hat{S}_B}\bar{\varphi}_{t2})\right]^{\sim} - \frac{i\tau_2\epsilon_2\dot\sigma(t)}{2\sigma(t)}X_t\cdot(\varphi_{t2}, \varphi_{t1}).$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis des letzten Satzes. Zunächst gilt $(S_M)_{|B_t} \cong S_{B_t} \oplus \hat{S}_{B_t}$ nach Satz 3.3.6. Somit folgt auf Grund der konformen Äquivalenz

$$\nabla_X^{S_M}\varphi = (\nabla_{X_t}^{S_{B_t}}\varphi_{t1}, \nabla_{X_t}^{S_{B_t}}\varphi_{t2}) + (-1)^m\frac{i\tau_n\epsilon_n}{2}(\nabla_{X_t}^M X_\eta)\cdot(\urcorner(\varphi_{t2}), \urcorner(\varphi_{t1})).$$

Ebenso gelten

$$(\nabla_{\bar{X}_t}^{S_{B_t}}\bar{\varphi}_{t1}, \nabla_{\bar{X}_t}^{\hat{S}_{B_t}}\bar{\varphi}_{t2}) = \frac{1}{\sigma(t)}\left[(\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B}\bar{\varphi}_{t1}, \nabla_{\bar{X}_t}^{\hat{S}_B}\bar{\varphi}_{t2})\right]^{\sim}$$

$$\text{und } \nabla_{X_t}^M X_\eta = \frac{\dot\sigma(t)}{\sigma(t)}X_t.$$

Wird Lemma 3.3.4 berücksichtigt, so ist die erste Gleichung gezeigt. Die zweite folgt mit $g(\nabla_{X_\eta}^M s_k, s_l) = 0$. □

Die Formeln in den konform-äquivalenten Räumen sind auf Grund der Beziehung $\nabla^{\widetilde{M}}_{X_t} X_\eta = 0$ etwas kürzer. Die Beweise verlaufen analog zu den Beweisen der beiden vorherigen Sätze und werden daher weggelassen.

Satz 3.4.9. *Im Fall gerader Dimension von $(B^{n-1,\hat{k}}, h)$ gilt für die kovariante Ableitung im Spinorbündel von $S_{\widetilde{M}}$ im Punkt (b,t) für ein am Blatt B_t tangential anliegendes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ und ein Spinorfeld φ:*

$$\nabla^{S_{\widetilde{M}}}_{X} \varphi = \left[\nabla^{S_B}_{\bar{X}_t} \bar{\varphi}_t\right]^{\sim} \qquad \textit{und} \qquad \nabla^{S_{\widetilde{M}}}_{\tilde{X}_\eta} \varphi = \sigma(t)\dot{\varphi}.$$

Im Fall ungerader Dimension von $(B^{n-1,\hat{k}}, h)$ gilt für die kovariante Ableitung im Spinorbündel von $S_{\widetilde{M}}$ im Punkt (b,t) für ein am Blatt B_t tangential anliegendes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ und ein Spinorfeld $\varphi = (\varphi_{t1}, \varphi_{t2}) \in \Gamma((S_{\widetilde{M}})_{B_t} \oplus (\hat{S}_{\widetilde{M}})_{B_t})$:

$$\nabla^{S_{\widetilde{M}}}_{X} \varphi = \left[(\nabla^{S_B}_{\bar{X}_t} \bar{\varphi}_{t1}, \nabla^{\hat{S}_B}_{\bar{X}_t} \bar{\varphi}_{t2})\right]^{\sim} \qquad \textit{und} \qquad \nabla^{S_{\widetilde{M}}}_{\tilde{X}_\eta} \varphi = \sigma(t)\dot{\varphi}.$$

3.5. **Spinstrukturen der Produkträume $B_\sigma \times S^1$ und $B \times_\sigma S^1$.**
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^k$, die 2π-periodisch ist, kann als Funktion $\bar{f}$ auf der Sphäre S^1 aufgefaßt werden. Eine Möglichkeit diese Tatsache einzusehen ist, daß der Graph der Funktion f unter folgender Wirkung von $\mathbb{Z}$ invariant ist: $z\cdot(t, f(t) := (t+2\pi z, f(t+2\pi z))$. Dann ist der Orbit $(e^{it}, \bar{f}(e^{it})$ mit Repräsentant $(t, f(t))$ wohldefiniert und die Menge der Orbits ist der Graph der Funktion $\bar{f}$ auf S^1.

Ebenso kann eine 4π-periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^k$, die zusätzlich für alle $t \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{Z}$ die Bedingung $g(t + 2\pi z) = -g(t)$ erfüllt, als Funktion auf der Sphäre S^1 aufgefaßt werden. Wird die folgende Wirkung von $\mathbb{Z}$ auf dem Graphen von g betrachtet, so folgt die Behauptung: $z \cdot (t, g(t)) := (t + 2\pi z, (-1)^z g(t + 2\pi z))$. Die Menge der (wohldefinierten) Orbits $(e^{it}, \bar{g}(e^{it}))$ mit Repräsentant $(t, g(t))$ ist wieder der Graph einer Funktion $\bar{g}$ auf S^1.

Analog kann für Funktionen $h : B \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^k$ vorgegangen werden. Durch entsprechende Wirkungen von $\mathbb{Z}$ lassen sich auch zwei verschiedene $Spin_+(n, k)$-Strukturen auf $B \times S^1$ durch eine $Spin_+(n, k)$-Struktur auf $B \times \mathbb{R}$ induzieren.

Bemerkung 3.5.1. *Die Warping-Funktion $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ sei von nun an stets eine 2π-periodische Funktion. Weiterhin bezeichnen M das Warped-Produkt $B_\sigma \times \mathbb{R}$ und $\widetilde{M}$ den Produktraum $B \times_\sigma \mathbb{R}$. Darüber hinaus seien $N := B_\sigma \times S^1$ und $\widetilde{N} := B \times_\sigma S^1$.*

Satz 3.5.2. *Ist (B, h) eine semiriemannsche raum- und zeitartig orientierbare Spinmannigfaltigkeit, so existieren auf $B \times S^{1,k}$ genau doppelt soviele Spinstrukturen wie auf B.*

Beweis.
Zunächst wird die Existenz einer Spinstruktur auf $B \times S^1$ nachgewiesen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k = 0$. Dann ist eine Zerlegung in maximal raum- und zeitartige Unterbündel des Tangentialbündels von $B \times S^1$ folgendermaßen gegeben. Es gilt bekanntlich $T(B \times S^1) \cong TB \times TS^1$. Die Existenz der beiden Zerlegungen in maximal raum- und zeitartige Unterbündel $\xi^+ \oplus \xi^-$ von TB und $TS^1 \cong TS^1 \oplus \mathbb{S}^1$, bei der $\mathbb{S}^1$ ein Vektorbündel der Dimension Null über S^1 sei, ist auch klar. Dann ist mit $\chi^+ := \xi^+ \times TS^1$ und $\chi^- := \xi^- \times \mathbb{S}^1$ eine Zerlegung von $T(B \times S^1)$ in maximal raum- und zeitartige Unterbündel gegeben. Nach Satz 1.6.3 ist

$$\begin{aligned} w_1(\chi^+) &= w_1(\chi^-) = 0 \\ \text{und } w_2(\chi^+) &+ w_2(\chi^-) = 0 \end{aligned}$$

für die Existenz einer Spinstruktur hinreichend.

Dieses Kriterium wird nun anhand der Rechenregeln für Stiefel-Whitney-Klassen und der Voraussetzung, daß auf B eine Spinstruktur existiert nachgerechnet. Für die erste Stiefel-Whitney-Klassen ergibt sich:

$$\begin{aligned} w_1(\chi^+) &= w_1(\xi^+) \times 1 + 1 \times w_1(TS^1) = 0 \\ w_1(\chi^-) &= w_1(\xi^-) \times 1 + 1 \times w_1(\mathbb{S}^1) = 0, \end{aligned}$$

da $w_1(\xi^+) = w_1(\xi^-) = 0$ wegen der Spinstruktur auf B, $w_1(TS^1)$ auf Grund der Orientierbarkeit der Sphäre und $w_1(\mathbb{S}^1) = 0$ aus Dimensionsgründen gilt. Ferner folgt für $w_2(\chi^+) + w_1(\chi^-)$:

$$\begin{aligned} w_2(\chi^+) + w_2(\chi^-) &= w_2(\xi^+) \times 1 + w_1(\xi^+) \times w_1(TS^1) + 1 \times w_2(TS^1) \\ &\qquad + w_2(\xi^-) \times 1 + w_1(\xi^-) \times w_1(\mathbb{S}^1) + 1 \times w_2(\mathbb{S}^1) \\ &= (w_2(\xi^+) + w_2(\xi^-)) \times 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 1.6.7 gilt nun, daß auf M genau $H^1(M;\mathbb{Z}_2)$ nicht äquivalente Spinstrukturen $[(Q,f)]$ existieren. Aus der Topologie ist

$$H^1(B \times S^1;\mathbb{Z}_2) = H^1(B;\mathbb{Z}_2) \oplus H^1(S^1;\mathbb{Z}_2) = H^1(B;\mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2$$

bekannt. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Definition 3.5.3. *Die durch $\xi(z) := (z, 1)$ und $\omega(z) := (z, (-1)^z)$ definierten Homomorphismen $\xi, \omega : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) \oplus (\mathbb{Z}_2, \cdot)$, induzieren die Wirkungen Ξ und Ω von $(\mathbb{Z}, +)$ auf $Q_{\widetilde{M}}$:*

$$\begin{aligned} \Xi(z)([(b,t,u),v]) &:= [(b, t + 2\pi z, u), 1 \cdot v], \\ \Omega(z)([(b,t,u),v]) &:= [(b, t + 2\pi z, u), (-1)^z \cdot v]. \end{aligned}$$

Die Wirkung Υ von $(\mathbb{Z}, +)$ auf $P_{\widetilde{M}}$ ist durch

$$\Upsilon(z)([(b,t,A),B]) := [(b, t + 2\pi z, A), B]$$

gegeben.

Lemma 3.5.4.

1. *Die eben definierten Wirkungen Ξ und Ω von $\mathbb{Z}$ auf dem $Spin_+(n,k)$-Hauptfaserbündel $Q_{\widetilde{M}}$ über $\widetilde{M}$ sind wohldefiniert.*
2. *Die Wirkung Υ auf $P_{\widetilde{M}}$ aus Definition 3.5.3 ist wohldefiniert.*

Beweis. Es seien $((b,t,u),v)$ und $((b,t,\tilde{u}),\tilde{v})$ verschiedene Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse in $Q_{\widetilde{M}}$ und es sei $z \in \mathbb{Z}$. Auf Grund der transitiven Gruppenwirkung existiert dann ein $g \in Spin_+(n-1,\hat{k})$ mit $((b,t,u\cdot g), g^{-1}\cdot v) = ((b,t,\tilde{u}),\tilde{v})$. Nun folgen die Behauptungen:

$$\begin{aligned} \Xi(z)[(b,t,u),v] &= [(b, t+2\pi z, u), v] = [(b, t+2\pi z, u\cdot g), g^{-1}\cdot v] \\ &= [(b, t+2\pi z, \tilde{u}), \tilde{v}] = \Xi(z)[(b,t,\tilde{u}),\tilde{v}], \\ \Omega(z)[(b,t,u),v] &= [(b, t+2\pi z, u), (-1)^z v] \\ &= [(b, t+2\pi z, u\cdot g), g^{-1}\cdot (-1)^z v] \\ &= [(b, t+2\pi z, \tilde{u}), (-1)^z \tilde{v}] = \Omega(z)[(b,t,\tilde{u}),\tilde{v}]. \end{aligned}$$

Der Beweis der letzten Behauptung verläuft identisch zum Beweis von Ω. Die Gruppe $Spin_+(n-1,\hat{k})$ ist dabei durch $SO_+(n-1,\hat{k})$ zu ersetzen. $\square$

Definition 3.5.5. *Die Faktorbündel* ${}^{Q_{\widetilde{M}}}/_{(\mathbb{Z},\Xi)}$, ${}^{Q_{\widetilde{M}}}/_{(\mathbb{Z},\Omega)}$ *und* ${}^{P_{\widetilde{M}}}/_{(\mathbb{Z},\Upsilon)}$ *werden mit* $Q_{\widetilde{N},\Xi}$, $Q_{\widetilde{N},\Omega}$ *beziehungsweise* $P_{\widetilde{N},\Upsilon}$ *bezeichnet. Für die Elemente in diesen Bündeln wird folgende Notation eingeführt:*

$$[(b,e^{it},u),v]_\Xi := [(b,t,u),v]\cdot\mathbb{Z} \in Q_{\widetilde{N},\Xi}$$
$$[(b,e^{it},u),v]_\Omega := [(b,t,u),v]\cdot\mathbb{Z} \in Q_{\widetilde{N},\Omega}$$
$$[(b,e^{it},A),B]_\Upsilon := [(b,t,A),B]\cdot\mathbb{Z} \in P_{\widetilde{N},\Upsilon}$$

Die Abbildungen $f_\Xi : Q_{\widetilde{N},\Xi} \to P_{\widetilde{N},\Upsilon}$ *und* $f_\Omega : Q_{\widetilde{N},\Omega} \to P_{\widetilde{N},\Upsilon}$ *sind durch*

$$f_\Xi([(b,e^{it},u),v]_\Xi) := [(b,e^{it},f_B(u),\lambda(v)]_\Upsilon$$
$$\text{und } f_\Omega([(b,e^{it},u),v]_\Omega) := [(b,e^{it},f_B(u),\lambda(v)]_\Upsilon$$

definiert.

Lemma 3.5.6. *Die Abbildungen* f_Ξ *und* f_Ω *sind wohldefiniert.*

Beweis. Wegen $\lambda(-v)=\lambda(v)$ gilt für die von (Q_B,f_B) induzierte Spinstrukur $(Q_{\widetilde{M}},f_{\widetilde{M}})$, die in Bemerkung 3.4.3 beschrieben wurde:

$$f_{\widetilde{M}}\circ\Xi = \Upsilon\circ(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\times f_{\widetilde{M}}) : \mathbb{Z}\times Q_{\widetilde{M}} \to P_{\widetilde{M},\Xi}$$
$$f_{\widetilde{M}}\circ\Omega = \Upsilon\circ(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\times f_{\widetilde{M}}) : \mathbb{Z}\times Q_{\widetilde{M}} \to P_{\widetilde{M},\Omega}$$

Daraus folgt, daß Orbits auf Orbits abgebildet werden. $\square$

Lemma 3.5.7. *Auf* $\widetilde{N}$ *sind* $(Q_{\widetilde{N},\Xi},f_\Xi)$ *und* $(Q_{\widetilde{N},\Omega},f_\Omega)$ *zwei Spinstrukturen.*

Beweis. Da sowohl $Q_{\widetilde{N},\Xi}$ als auch $Q_{\widetilde{N},\Omega}$ $Spin_+(n,k)$-Hauptfaserbündel über $\widetilde{N}$ sind, muß die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc}
Q_{\widetilde{N},\Xi}\times Spin_+(n,k) & \xrightarrow{\cdot} & Q_{\widetilde{N},\Xi} & \xrightarrow{\pi} & \widetilde{N} \\
\downarrow{\scriptstyle f_\Xi\times\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle f_\Xi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\
P_{\widetilde{N},\Upsilon}\times SO_+(n,k) & \xrightarrow{\cdot} & P_{\widetilde{N},\Upsilon} & \xrightarrow{\pi} & \widetilde{N}
\end{array}$$

überprüft werden. Dies folgt direkt aus den Definitionen der einzelnen Abbildungen. Der Fall $Q_{\widetilde{N},\Omega}$ verläuft entsprechend. $\square$

Satz 3.5.8. *Die Spinstrukturen* $(Q_{\widetilde{N},\Xi},f_\Xi)$ *und* $(Q_{\widetilde{N},\Omega},f_\Omega)$ *sind nicht äquivalent.*

Beweis. Angenommen, daß $(Q_{\widetilde{N},\Xi},f_\Xi)$ zu $(Q_{\widetilde{N},\Omega},f_\Omega)$ äquivalent sei. Unter dieser Hypothese existiert ein $Spin_+(n,k)$-Hauptfaserbündelisomorphismus $\Phi : Q_{\widetilde{N},\Xi} \to Q_{\widetilde{N},\Omega}$, so daß für alle $q_\Xi = [(b,e^{it},u),v]_\Xi \in Q_{\widetilde{N},\Xi}$ die Identität $\Phi(q_\Xi) := [(b,\phi_0(q_\Xi),\phi_1(q_\Xi)),\phi_2(q_\Xi)]_\Omega$ gilt. Auf Grund der Fasertreue von Φ und der Wirkung Ω von $\mathbb{Z}$ kann $\phi_0(q_\Xi)$ stets gleich dem zweiten Eintrag des Repräsentanten von q_Ξ gewählt werden. Dann gilt für den Repräsentanten $\tilde{q}_\Xi = ((b, e^{i(t+2\pi)}, u), v)$ von q_Ξ wegen der Wohldefiniertheit von Φ:

$$\begin{aligned}\Phi(q_\Xi) &= \Phi(((b, e^{i(t+2\pi)}, u), v)) \\ &= ((b, e^{i(t+2\pi)}, \phi_1(\tilde{q}_\Xi)), \phi_2(\tilde{q}_\Xi)) \\ &= ((b, e^{it}, \phi_1(\tilde{q}_\Xi)), -\phi_2(\tilde{q}_\Xi)) \\ &= \Phi([(b, e^{it}, u), -v]_\Xi).\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}[(b, e^{it}, f_B(u)), \lambda(v)]_\Upsilon &= f_\Xi(q_\Xi) = f_\Omega(\Phi(q_\Xi)) \\ &= f_\Omega([(b, e^{it}, \phi_1(q_\Xi)), \phi_2(q_\Xi)]_\Omega) \\ &= [(b, e^{it}, f_B(\phi_1(q_\Xi))), \lambda(\phi_2(q_\Xi))]_\Upsilon.\end{aligned}$$

Somit folgt $\lambda(v) = \lambda(\phi_2(q_\Xi))$, was $\phi_2(q_\Xi) = \pm v$ wegen $\mathrm{Ker}(\lambda) = \{\pm 1\}$ impliziert.

Die Einschränkung der Abbildung ϕ_2 auf die Menge der Orbits, die durch die Repräsentanten $\{((b, e^{it}, u), v) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ gegeben ist, sei $\tilde{\phi}_2$. Dann ist $\tilde{\phi}_2 : [0; 2\pi] \to \{\pm v\}$ ein glatter Weg von v nach $-v$ in der diskreten Menge $\{v; -v\}$, falls $\tilde{\phi}_2(0) = v$ gilt. Ist $\tilde{\phi}_2(0) = -v$, so folgt die Existenz eines glatten Weges zwischen $-v$ und v. Alle glatten Wege in $\{v; -v\}$ sind aber konstant. Somit folgt, daß der Isomorphismus Φ nicht existieren kann. $\square$

3.6. Die Diracoperatoren D_Ξ und $\widetilde{D}_\Xi$ auf den Produkträumen $B_\sigma{\times}S^1$ und $B\times_\sigma S^1$.

In diesen Abschnitt werden die zu $B\ _\sigma\times S^1$ und $B\times_\sigma S^1$ assoziierten Spinorbündel beschrieben, die durch die Wirkung Ξ des letzten Abschnitts durch von einer Spinstruktur auf B induziert werden. Spinoren und Vektorfelder auf auf $B\ _\sigma{\times}S^1$ und $B{\times}_\sigma S^1$ dabei ohne weitere Bemerkung auch als 2π-periodische Vektorfelder oder Spinoren auf den entsprechenden Produkträumen mit $\mathbb{R}$ identifiziert.

Bemerkung 3.6.1. *Bezeichnet $\pi_{\widetilde{N}}$ die Projektion auf die erste Komponente von $\widetilde{N}$, so gilt analog zu Bemerkung 3.4.3:*

$$\begin{aligned}
Q_{\widetilde{N},\Xi} &= \pi^*_{\widetilde{N}}Q_B\times_{Spin_+(n-1,\hat{k})}Spin_+(n,k),\\
P_{\widetilde{N},\Upsilon} &= \pi^*_{\widetilde{N}}P_B\times_{SO_+(n-1,\hat{k})}SO_+(n,k),\\
S_{\widetilde{N},\Xi} &= Q_{\widetilde{N},\Xi}\times_{Spin_+(n,k)}\Delta_{n,k} = \pi^*_{\widetilde{N}}Q_B\times_{Spin_+(n-1,\hat{k})}\Delta_{n,k}.
\end{aligned}$$

Ein Spinorfeld $\varphi\in\Gamma(S_{\widetilde{N},\Xi})$ kann mit einem bestimmten Spinorfeld $\check{\varphi}\in\Gamma(S_{\widetilde{M}})$ identifiziert werden: Da Ξ nur auf den Fußpunkten wirkt, liefert jedes glatte Spinorfeld φ auf $\widetilde{N}$ für $t\in[0,2\pi]$ und $z\in\mathbb{Z}$ durch die Definition $\check{\varphi}(b,t+2\pi z):=\varphi(b,e^{i(t+2\pi z)})$ ein glattes und in Faserrichtung 2π-periodisches Spinorfeld $\check{\varphi}$ auf $\widetilde{M}$. Die Zuordnung $\varphi\mapsto\check{\varphi}$ zwischen den Spinoren auf $\widetilde{N}$ und den 2π-periodischen Spinorfeldern auf $\widetilde{M}$ ist bijektiv.

Unter dem Spinorbündel $S_{\widetilde{N},\Xi}$ kann somit auch das Spinorbündel $S_{\widetilde{M}}$ verstanden werden, auf dem nicht alle Schnitte, sondern nur die 2π-periodischen betrachtet werden. Gleiches gilt natürlich auch für M und N an Stelle von $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$.

Satz 3.6.2. *Gilt* $\dim\ B^{n-1,\hat{k}}=2m$*, so kann das Spinorbündel $S_{\widetilde{N},\Xi}$ von $B\times_\sigma S^1$ im Punkt (b,e^{it}) mit dem Spinorbündel S_B von B im Punkt b identifiziert werden.*

Die Cliffordmultiplikation mit dem in S^1-Richtung zeigenden Vektorfeld $\widetilde{X}_\eta=\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ ist dort durch

$$\widetilde{X}_\eta\cdot\varphi=(-1)^m i\tau_n\urcorner(\varphi)$$

gegeben, wobei φ ein Spinor auf $\widetilde{N}$ ist. Bezeichnet $X\in\mathfrak{X}(\widetilde{N})$ ein an B_t tangential anliegendes Vektorfeld, so folgt für die kovariante Ableitung

$$\nabla_X^{S_{\widetilde{N},\Xi}}\varphi=\left[\nabla^{S_B}_{\bar{X}_t}\bar{\varphi}_t\right]^{\sim}\qquad\text{und}\qquad\nabla^{S_{\widetilde{N},\Xi}}_{\widetilde{X}_\eta}\varphi=\sigma(t)\dot{\varphi}.$$

Für den Dircoperator $\widetilde{D}_\Xi$ gilt in (b,e^{it})

$$\widetilde{D}_\Xi(\varphi)=[D_B(\bar{\varphi}_t)]^{\sim}+(-1)^m i\epsilon_n\tau_n\sigma(t)\urcorner(\dot{\varphi}).$$

Beweis. Die Aussagen über die Cliffordmultiplikation mit $\widetilde{X}_\eta$ und die kovariante Ableitung folgen mit Hilfe der Sätze 3.3.2 und 3.4.9, da die

Formeln auf dem Spinorbündel $S_{\widetilde{M}}$ über $B \times_\sigma \mathbb{R}$ auf den in Faserrichtung 2π-periodischen Spinorfeldern gelten. Die Behauptung über den Diracoperators folgt aus der lokal gültigen Formel, die in Bemerkung 1.5.4 angegeben wurde:

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_\Xi(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i \cdot \nabla_{e_i}^{S_{\widetilde{N},\Xi}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i e_i \cdot \nabla_{e_i}^{S_{\widetilde{N},\Xi}}(\varphi) + \epsilon_n \Gamma(X_\eta) \cdot \nabla_{\widetilde{X}_\eta}^{S_{\widetilde{N},\Xi}}(\varphi) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i e_i \cdot \left[\nabla_{e_i}^{S_B}(\bar{\varphi}_t)\right]^{\sim} + \epsilon_n \widetilde{X}_\eta \cdot (\sigma(t)\dot{\varphi}) \\ &= \left[D_B(\bar{\varphi}_t)\right]^{\sim} + (-1)^m i \epsilon_n \tau_n \sigma(t) \urcorner(\dot{\varphi}).\end{aligned}$$

□

Satz 3.6.3. *Gilt* dim $B^{n-1,\hat{k}} = 2m$, *so kann das Spinorbündel* $S_{N,\Xi}$ *von* $B_\sigma \times S^1$ *im Punkt* (b, e^{it}) *mit dem Spinorbündel* S_B *von* B *im Punkt* b *identifiziert werden.*

Die Cliffordmultiplikation eines Spinors $\varphi \in \Gamma(S_{N,\Xi})$ *mit dem in* S^1*-Richtung zeigenden Vektorfeld* $X_\eta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ *ist*

$$X_\eta(b, e^{it}) \cdot \varphi = (-1)^m i \tau_n \urcorner(\varphi).$$

Für die kovariante Ableitung gilt in (b, e^{it}) *für ein beliebiges an* B_t *tangential anliegendes Vektorfeld* $X \in \mathfrak{X}(N)$*:*

$$\nabla_X^{S_{N,\Xi}} \varphi = \frac{1}{\sigma(t)} \left([\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B} \bar{\varphi}_t]^{\sim} + (-1)^{m+1} \frac{i \tau_n \epsilon_n \dot{\sigma}(t)}{2} X_t \cdot \urcorner(\varphi_t) \right)$$

und $\nabla_{X_\eta}^{S_N,\Xi} \varphi = \dot{\varphi}$.

Für den Diracoperator D_Ξ *gilt in* (b, e^{it})*:*

$$D_\Xi(\varphi) = \frac{1}{\sigma(t)} [D_B(\bar{\varphi}_t)]^{\sim} + (-1)^m i \epsilon_n \tau_n \left(\urcorner(\dot{\varphi}) + \frac{(n-1)\dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)} \urcorner(\varphi_t) \right)$$

Beweis. Es ist nur noch der Korrekturterm $(-1)^{m+1} i \epsilon_n \tau_n \frac{(n-1)\dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)} \urcorner(\varphi_t)$ in der Formel des Diracoperators zu berechnen. Er folgt durch Abspaltung des Korrekturterms in der kovarianten Ableitung in der lokalen Formel des Diracoperators:

$$\sigma^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i (\tilde{s}_i)_t \cdot ((-1)^{m+1} \frac{i \tau_n \epsilon_n \dot{\sigma}(t)}{2} (\tilde{s}_i)_t) \cdot \urcorner(\varphi_t),$$

da $(\tilde{s}_i)_t = s_i$ gilt. □

Satz 3.6.4. *Sei* dim $B^{n-1,\hat{k}} = 2m - 1$. *Dann kann das Spinorbündel* $S_{\widetilde{N},\Xi}$ *von* $B \times_\sigma S^1$ *im Punkt* (b, e^{it}) *mit dem Bündel* $S_B \oplus \hat{S}_B$ *über* B *im Punkt* b *identifiziert werden.*

Für die Cliffordmultiplikation mit dem in S^1-Richtung zeigenden Vektorfeld $\widetilde{X}_\eta = \sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ gilt für jeden Spinor $\varphi \in \Gamma(S_{\widetilde{N},\Xi})$

$$\widetilde{X}_\eta \cdot \varphi = \begin{cases} (-1)^{m-1} i\tau_n(\urcorner(\varphi_2), \urcorner(\varphi_1)), & \textit{falls } m \neq 1, \\ i\tau_n(\varphi_2, \varphi_1), & \textit{falls } m = 1. \end{cases}$$

Für die kovariante Ableitung entlang eines tangential an B_t anliegenden Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(\widetilde{N})$ folgt dann

$$\nabla_X^{S_{\widetilde{N}},\Xi} \varphi = \Big[(\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B} \bar{\varphi}_{t1}, \nabla_{\bar{X}_t}^{\hat{S}_B} \bar{\varphi}_{t2})\Big]^{\sim} \quad \textit{und} \quad \nabla_{\widetilde{X}_\eta}^{S_{\widetilde{N}},\Xi} \varphi = \sigma(t)(\dot{\varphi}_{t1}, \dot{\varphi}_{t2})$$

Falls $\dim B > 1$ *gilt, so folgt für den Diracoperator in* (b, e^{it})

$$\widetilde{D}_\Xi(\varphi) = \Big[\big(D_B(\bar{\varphi}_{t1}), \hat{D}_B(\bar{\varphi}_{t2})\big)\Big]^{\sim} + (-1)^{m-1} i\epsilon_n \tau_n \sigma(t) \Big(\urcorner(\dot{\varphi}_{t2}), \urcorner(\dot{\varphi}_{t1})\Big),$$

während im Fall $\dim B = 1$

$$\widetilde{D}_\Xi(\varphi) = \Big[\big(D_B(\bar{\varphi}_{t1}), \hat{D}_B(\bar{\varphi}_{t2})\big)\Big]^{\sim} + i\epsilon_2\tau_2\sigma(t)\big(\dot{\varphi}_{t2}, \dot{\varphi}_{t1}\big)$$

gilt.

Satz 3.6.5. *Für* $\dim B^{n-1,\hat{k}} = 2m-1$ *kann das Spinorbündel $S_{N,\Xi}$ von $B_\sigma \times S^1$ im Punkt (b, e^{it}) mit dem Bündel $S_B \oplus \hat{S}_B$ über B im Punkt b identifiziert werden.*

Für die Cliffordmultiplikation eines Spinors φ mit dem in S^1-Richtung zeigenden Vektorfeld $X_\eta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ gilt

$$X_\eta \cdot \varphi = \begin{cases} (-1)^{m-1} i\tau_n(\urcorner(\varphi_2), \urcorner(\varphi_1)), & \textit{falls } m > 1 \\ i\tau_2(\varphi_2, \varphi_1), & \textit{falls } m = 1. \end{cases}$$

Sei X ein an B_t tangential anliegendes Vektorfeld auf N. Dann gilt für die kovariante Ableitung und den Diracoperator in (b, e^{it}) für $m > 1$:

$$\nabla_X^{S_{N,\Xi}} \varphi = \frac{1}{\sigma}\Big[(\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B} \bar{\varphi}_{t1}, \nabla_{\bar{X}_t}^{\hat{S}_B} \bar{\varphi}_{t2})\Big]^{\sim} + \frac{(-1)^m i\tau_n\epsilon_n\dot{\sigma}}{2\sigma} X_t \cdot (\urcorner(\varphi_{t2}), \urcorner(\varphi_{t1})),$$

$$\nabla_{X_\eta}^{S_{N,\Xi}} \varphi = (\dot{\varphi}_{t1}, \dot{\varphi}_{t2}),$$

$$D_\Xi(\varphi) = \frac{1}{\sigma(t)}\Big[\big(D_B(\bar{\varphi}_{t1}), \hat{D}_B(\bar{\varphi}_{t2})\big)\Big]^{\sim} + (-1)^{m-1} i\epsilon_n\tau_n\big(\urcorner(\dot{\varphi}_{t2}), \urcorner(\dot{\varphi}_{t1})\big) + (-1)^{m-1}\frac{(n-1)i\epsilon_n\tau_n\dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)}\big(\urcorner(\varphi_{t2}), \urcorner(\varphi_{t1})\big).$$

Ist $\dim\ B = 1$, *so gilt:*

$$\begin{aligned}
\nabla^{S_{N,\Xi}}_X \varphi &= \frac{1}{\sigma(t)} \Big[(\nabla^{S_B}_{\bar{X}_t} \bar{\varphi}_{t1}, \nabla^{\hat{S}_B}_{\bar{X}_t} \bar{\varphi}_{t2}) \Big]^{\sim} + \frac{(-1)^m i \tau_2 \epsilon_2 \dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)} X_t \cdot (\varphi_{t2}, \varphi_{t1}), \\
\nabla^{S_{N,\Xi}}_{X_\eta} \varphi &= (\dot{\varphi}_{t1}, \dot{\varphi}_{t2}), \\
D_\Xi(\varphi) &= \frac{1}{\sigma(t)} \Big[\big(D_B(\bar{\varphi}_{t1}), \hat{D}_B(\bar{\varphi}_{t2}) \big) \Big]^{\sim} + (-1)^{m-1} i \epsilon_n \tau_n \big(\dot{\varphi}_{t2}, \dot{\varphi}_{t1} \big) \\
&\qquad + (-1)^{m-1} \frac{i \epsilon_2 \tau_2 \dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)} \big(\varphi_{t2}, \varphi_{t1} \big).
\end{aligned}$$

3.7. Die Diracoperatoren D_Ω und $\widetilde{D}_\Omega$ auf den Produkträumen $B_\sigma{\times}S^1$ und $B \times_\sigma S^1$.

In diesen Abschnitt werden die zu $B\ {}_\sigma \times S^1$ und $B \times_\sigma S^1$ assoziierten Spinorbündel beschrieben, die durch die Wirkung Ξ des letzten Abschnitts durch von einer Spinstruktur auf B induziert werden. Spinoren und Vektorfelder auf auf $B\ {}_\sigma \times S^1$ und $B \times_\sigma S^1$ dabei ohne weitere Bemerkung auch als 2π-schiefperiodische Vektorfelder oder Spinoren auf den entsprechenden Produkträumen mit $\mathbb{R}$ identifiziert.

Bemerkung 3.7.1. *Es bezeichnet weiterhin $\pi_{\widetilde{N}}$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann gilt wie schon in den Bemerkungen 3.4.3 und 3.6.1:*

$$
\begin{aligned}
Q_{\widetilde{N},\Omega} &= \pi^*_{\widetilde{N}} Q_B \times_{Spin_+(n-1,\hat{k})} Spin_+(n,k),\\
P_{\widetilde{N},\Upsilon} &= \pi^*_{\widetilde{N}} P_B \times_{SO_+(n-1,\hat{k})} SO_+(n,k),\\
S_{\widetilde{N},\Omega} &= Q_{\widetilde{N},\Omega} \times_{Spin_+(n,k)} \Delta_{n,k}.
\end{aligned}
$$

Auch in diesem Fall können Spinorfelder $\varphi \in \Gamma(S_{\widetilde{N},\Omega})$ mit bestimmten Spinorfeldern $\check{\varphi} \in \Gamma(S_{\widetilde{M}})$ identifiziert werden: Da Ω aber nicht ausschließlich auf den Fußpunkten wirkt, liefert jeder glatte Spinor φ für $t \in [0,2\pi]$ und $z \in \mathbb{Z}$ durch $\check{\varphi}(b, t+2\pi z) := \varphi(b, e^{i(t+2\pi z)})$ kein glattes und in Faserrichtung 2π-periodisches Spinorfeld auf $\widetilde{M}$. Wird dem Spinor φ für $t \in [0,4\pi]$ und $z \in \mathbb{Z}$ durch die Festsetzung $\check{\varphi}(b, t+4\pi z) := \varphi(b, e^{i(t+4\pi z)})$ das Spinorfeld $\check{\varphi}$ zugeordnet, so ist $\check{\varphi}$ wegen der Wirkung Ω ein in Faserrichtung 4π-periodisches Spinorfeld auf $\widetilde{M}$, das die zusätzliche Bedingung $\check{\varphi}(b, t+2\pi z) = -\check{\varphi}(b,t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Diese Eigenschaft wird im folgenden 2π-schiefperiodisch genannt. Die Zuordnung $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ ist eine Bijektion zwischen den Spinorfeldern auf $\widetilde{N}$ und den in Faserrichtung 2π-schiefperiodischen Spinoren auf $\widetilde{M}$.

Unter dem Spinorbündel $S_{\widetilde{N},\Omega}$ kann somit auch das Spinorbündel $S_{\widetilde{M}}$ verstanden werden, auf dem nicht alle Schnitte, sondern nur die 2π-schiefperiodischen betrachtet werden. Gleiches gilt auch hier für M und N an Stelle von $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$.

Satz 3.7.2. *Es gelte* $\dim\ B^{n-1,\hat{k}} = 2m$*. Im Punkt (b, e^{it}) kann das Spinorbündel $S_{\widetilde{N},\Omega}$ mit S_B im Punkt b identifiziert werden.*

Für die Cliffordmultiplikation eines Spinors $\varphi \in \Gamma(S_{\widetilde{N},\Omega})$ mit dem in S^1-Richtung zeigenden Vektorfeld $\widetilde{X}_\eta = \sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$ gilt

$$\widetilde{X}_\eta \cdot \varphi = (-1)^m i \tau_n \urcorner(\varphi).$$

Für die kovariante Ableitung in (b, e^{it}) gilt für an B_t tangential anliegende Vektorfelder X auf $\widetilde{N}$

$$\nabla^{S_{\widetilde{N},\Omega}}_X \varphi = \left[\nabla^{S_B}_{\bar{X}_t} \bar{\varphi}_t\right]^{\sim} \qquad \textit{und} \qquad \nabla^{S_{\widetilde{N},\Omega}}_{\widetilde{X}_\eta} \varphi = \sigma(t)\dot{\varphi}.$$

Für den Dircoperator $\widetilde{D}_\Omega$ gilt in (b,t)

$$\widetilde{D}_\Omega(\varphi) = \Big[D_B(\bar{\varphi}_t)\Big]^{\sim} + (-1)^m i\epsilon_n\tau_n\sigma(t)\urcorner(\dot{\varphi}).$$

Satz 3.7.3. *Für* $\dim\ B^{n-1,\hat{k}} = 2m$ *kann das Spinorbündel* $S_{N,\Omega}$ *von* $B_\sigma \times S^1$ *im Punkt* (b,e^{it}) *mit dem Spinorbündel* S_B *von* B *im Punkt* b *identifiziert werden.*

Die Cliffordmultiplikation eines Spinors φ *mit dem in* S^1*-Richtung zeigenden Vektorfeld* X_η *ist durch*

$$X_\eta \cdot \varphi = (-1)^m i\tau_n \urcorner(\varphi)$$

gegeben. Für die kovariante Ableitung entlang eines an B_t *tangential anliegenden Vektorfeldes* X *auf* N *gilt*

$$\nabla_X^{S_{N,\Omega}}\varphi = \frac{1}{\sigma(t)}\left([\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B}\bar{\varphi}_t]^{\sim} + (-1)^{m+1}\frac{i\tau_n\epsilon_n\dot{\sigma}(t)}{2}X_t\cdot\urcorner(\varphi_t)\right),$$
$$\nabla_{X_\eta}^{S_N,\Omega}\varphi = \dot{\varphi}.$$

Für den Dircoperator D_Ω *folgt*

$$D_\Omega(\varphi) = \frac{1}{\sigma(t)}[D_B(\bar{\varphi}_t)]^{\sim} + (-1)^m i\epsilon_n\tau_n\left(\urcorner(\dot{\varphi}) + \frac{(n-1)\dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)}\urcorner(\varphi_t)\right).$$

Satz 3.7.4. *Gilt* $\dim\ B^{n-1,\hat{k}} = 2m-1$*, so kann im Punkt* (b,e^{it}) $S_{\widetilde{N},\Omega}$ *mit* $S_B \oplus \hat{S}_B$ *identifiziert werden.*

Für die Cliffordmultiplikation mit $\widetilde{X}_\eta$ *gilt*

$$\widetilde{X}_\eta\cdot\varphi = \begin{cases}(-1)^{m-1}i\tau_n(\urcorner(\varphi_2),\urcorner(\varphi_1)), & \textit{falls } m>1\\ i\tau_2(\varphi_2,\varphi_1), & \textit{falls } m=1,\end{cases}$$

wobei $\varphi\in\Gamma(S_{\widetilde{N},\Omega})$ *ist. Für die kovariante Ableitung gilt in* (b,e^{it}) *für alle* m *und beliebige an* B_t *tangential anliegende Vektorfelder* $X\in\mathfrak{X}(\widetilde{N})$*:*

$$\nabla_X^{S_{\widetilde{N}},\Omega}\varphi = \Big[(\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B}\bar{\varphi}_{t1}, \nabla_{\bar{X}_t}^{\hat{S}_B}\bar{\varphi}_{t2})\Big]^{\sim} \qquad \textit{und} \qquad \nabla_{\tilde{X}_\eta}^{S_{\widetilde{N}},\Omega}\varphi = \sigma(t)\dot{\varphi}.$$

Ist $m>1$*, so folgt für den Diracoperator*

$$\widetilde{D}_\Omega\varphi = \Big[\big(D_B(\bar{\varphi}_{t1}),\hat{D}_B(\bar{\varphi}_{t2})\big)\Big]^{\sim} + (-1)^{m-1}i\epsilon_n\tau_n\sigma(t)\,\big(\urcorner(\dot{\varphi}_{t2}),\urcorner(\dot{\varphi}_{t1})\big)$$

während für $m=1$

$$\widetilde{D}_\Omega(\varphi) = \Big[\big(D_B(\bar{\varphi}_{t1}),\hat{D}_B(\bar{\varphi}_{t2})\big)\Big]^{\sim} + i\epsilon_2\tau_2\sigma(t)\,((\dot{\varphi})_{t2},(\dot{\varphi})_{t1})$$

gilt.

Satz 3.7.5. *Für* $\dim\ B^{n-1,\hat{k}} = 2m-1$ *kann das Spinorbündel* $S_{N,\Omega}$ *von* $B_\sigma\times S^1$ *im Punkt* (b,e^{it}) *mit dem Bündel* $S_B\oplus\hat{S}_B$ *über* B *im Punkt* b *identifiziert werden.*

Für die Cliffordmultiplikation eines Spinors φ mit dem in S^1-Richtung zeigenden Vektorfeld X_η gilt

$$X_\eta \cdot \varphi = \begin{cases} (-1)^{m-1} i\tau_n(\urcorner(\varphi_2), \urcorner(\varphi_1)), & \text{falls } m > 1 \\ i\tau_2(\varphi_2, \varphi_1), & \text{falls } m = 1. \end{cases}$$

Für die kovariante Ableitung entlang eines an B_t tangential anliegenden Vektof]rfeldes X gilt in (b,t) für alle m:

$$\nabla_X^{S_{N,\Omega}} \varphi = \frac{1}{\sigma(t)} \left[(\nabla_{\bar{X}_t}^{S_B} \bar{\varphi}_{t1}, \nabla_{\bar{X}_t}^{\hat{S}_B} \bar{\varphi}_{t2}) \right]^{\sim} + (-1)^m \frac{i\tau_n \epsilon_n \dot{\sigma}(t)}{2} X_t \cdot (\urcorner \varphi_{t2}, \urcorner \varphi_{t1})$$

$$\nabla_{X_\eta}^{S_{N,\Omega}} \varphi = (\dot{\varphi}_{t1}, \dot{\varphi}_{t2})$$

Für den Diracoperator gilt im Fall $m > 1$

$$\begin{aligned} D_\Omega(\varphi) = & \frac{1}{\sigma(t)} \left[\big(D_B(\bar{\varphi}_{t1}), \hat{D}_B(\bar{\varphi}_{t2}) \big) \right]^{\sim} + (-1)^{m-1} i\epsilon_n \tau_n \big(\urcorner(\dot{\varphi}_{t2}), \urcorner(\dot{\varphi}_{t1}) \big) \\ & + (-1)^{m-1} \frac{(n-1) i\epsilon_n \tau_n \dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)} \big(\urcorner(\varphi_{t2}), \urcorner(\varphi_{t1}) \big), \end{aligned}$$

während für $m = 1$

$$\begin{aligned} D_\Omega(\varphi) = & \frac{1}{\sigma(t)} \left[\big(D_B(\bar{\varphi}_{t1}), \hat{D}_B(\bar{\varphi}_{t2}) \big) \right]^{\sim} + i\epsilon_2 \tau_2 \big(\dot{\varphi}_{t2}, \dot{\varphi}_{t1} \big) \\ & - \frac{i\epsilon_2 \tau_2 \dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)} \big(\varphi_{t2}, \varphi_{t1} \big) \end{aligned}$$

gilt.

3.8. Über das Spektrum der Diracoperatoren $\widetilde{D}_\Xi$ und $\widetilde{D}_\Omega$ auf $B \times_\sigma S^1$ mit konstantem σ.

In den Sätzen 3.8.7, 3.8.8 und 3.8.9 wird ein allgemeines Verfahren benutzt, um aus Eigenwerten vom Quadrat des Diracoperators Eigenwerte des Diracoperators zu konstruieren. Ist ein Eigenspinor Ψ des quadrierten Diracoperators zum Eigenwert μ^2 gegeben, so erfüllt er die Eigenwertgleichung $(T^2 - \mu^2 \operatorname{Id})\Psi = 0$. Mit der dritten binomischen Formel folgt $(T \mp \mu \operatorname{Id})(T \pm \mu \operatorname{Id})\Psi = 0$. Dann sind $(T \pm \mu \operatorname{Id})\Psi$ Eigenspinoren des Diracoperators zum Eigenwert $\pm\mu$, wenn sie nicht trivial sind.

Zunächst wird jedoch gezeigt, daß der quadrierte Diracoperator auf $B \times_\sigma S^1$ in die Summe des quadrierten Diracoperators auf B und zweier Korrekturterme zerfällt, die beide keine Ableitungen in B-Richtung enthalten. Ist die Funktion σ konstant, so verschwindet sogar einer dieser beiden Summanden. Für konstante σ wird dann das oben beschriebene Verfahren angewendet.

Abschließend wird die Frage untersucht, wann auf diese Art harmonische Spinoren auf $\widetilde{N} = B \times_\sigma S^1$ mit konstantem σ zu den Diracoperatoren $D_{\widetilde{N},\Xi}$ und $D_{\widetilde{N},\Omega}$ konstruiert werden können. Auf Grund der Dimensionsinvarianz des Raumes der harmonischen Spinoren unter konformen Änderungen folgt damit auch die Existenz harmonischer Spinoren auf $N = B\ {}_\sigma\!\times S^1$.

Bemerkung 3.8.1. *Mit Ausnahme von Lemma 3.8.3 wird ausschließlich der Fall einer konstanten Warping-Funktion $\sigma(t) \equiv \sigma$ behandelt. Wie in den beiden vorhergehenden Abschnitten werden Schnitte in $S_{N,\Xi}$ und $S_{\widetilde{N},\Xi}$ mit 2π-periodischen Schnitten in S_M und $S_{\widetilde{M}}$ und Schnitte in $S_{N,\Omega}$ und $S_{\widetilde{N},\Omega}$ mit 2π-schiefperiodischen Schnitten in S_M und $S_{\widetilde{M}}$ identifiziert.*

Definition 3.8.2. *Je nach Spinstruktur sei die Funktion $\rho_z(t) := e^{izt}$ (Spinstruktur ist durch Ξ induziert) und $\rho_z(t) := e^{i(2z+1)t/2}$ (Spinstruktur ist durch Ω induziert) definiert.*

Lemma 3.8.3. *Für das Quadrat des Diracoperators $\widetilde{D}$ auf den durch Ξ beziehungsweise Ω induzierten Spinstrukturen gilt*

$$\widetilde{D}^2\varphi = \begin{cases} \left[D_B^2\bar{\varphi}_t\right]^{\sim} - \epsilon_n\sigma\dot{\sigma}\dot{\varphi} - \epsilon_n\sigma^2\ddot{\varphi}, & \textit{falls } m \textit{ gerade} \\ \left[\left(D_B^2\bar{\varphi}_{t1}, \hat{D}_B^2(\bar{\varphi}_{t2})\right)\right]^{\sim} - \epsilon_n\sigma\dot{\sigma}\dot{\varphi} - \epsilon_n\sigma^2\ddot{\varphi} & \textit{falls } M \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Im Fall gerader Dimension von B sind die Vertauschungsrelationen $D_B \circ \urcorner = -\urcorner \circ D_B$ auszunutzen, während im Fall ungerader Dimension die Relation $-\urcorner \circ D_B = \hat{D}_B \circ \urcorner$ benutzt werden muß. Es wird die Behauptung für $\widetilde{D}_\Xi$ nur im Fall gerader Dimension nachgerechnet, die Rechnung der anderen Fälle verläuft entsprechend. Ist $\varphi \in \Gamma(S_{\widetilde{N},\Xi})$

beliebig gewählt, dann gilt

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}^2_\Xi(\varphi) &= \widetilde{D}_\Xi\Bigg(\big[D_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim + (-1)^m i\epsilon_n\tau_n\sigma\daleth(\dot\varphi)\Bigg)\\
&= \big[D^2_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim + (-1)^m i\epsilon_n\tau_n\sigma\daleth(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big[D_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim)\\
&\qquad + (-1)^m i\epsilon_n\tau_n\widetilde{D}_\Xi(\daleth(\sigma\dot\varphi))\\
&= \big[D^2_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim + (-1)^m i\epsilon_n\tau_n\sigma\daleth(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big[D_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim)\\
&\quad + (-1)^m i\epsilon_n\tau_n\big[D_B(\overline{(\daleth(\sigma\dot\varphi))_t})\big]^\sim + (-1)^{2m} i^2\epsilon_n^2\tau_n^2\sigma\daleth(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\daleth(\sigma\dot\varphi))\\
&= \big[D^2_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim + (-1)\epsilon_n\sigma\daleth\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\daleth(\sigma\dot\varphi))\big)\\
&= \big[D^2_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim - \epsilon_n\sigma\daleth\daleth\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\sigma\dot\varphi)\big)\\
&= \big[D^2_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim - \epsilon_n\sigma\dot\sigma\dot\varphi - \epsilon_n\sigma^2\ddot\varphi.
\end{aligned}
$$

□

Korollar 3.8.4. *Ist die Warping-Funktion σ konstant, so gilt*

$$
\widetilde{D}^2(\varphi) = \begin{cases} \big[D^2_B(\bar\varphi_t)\big]^\sim - \epsilon_n\sigma^2\ddot\varphi, & \textit{falls } \dim\, B \textit{ gerade}\\ \big[\big(D^2_B(\bar\varphi_{t1}), \hat{D}^2_B(\bar\varphi_{t2})\big)\big]^\sim - \epsilon_n\sigma^2\ddot\varphi, & \textit{falls } \dim\, B \textit{ ungerade.}\end{cases}
$$

Bemerkung 3.8.5. *Ein Spinorfeld ψ auf B läßt sich für $z \in \mathbb{Z}$ zu einem Spinorfeld $\psi_z \in \Gamma(S_{\widetilde{N},\Xi})$ beziehungsweise zu einem glatten Schnitt in $S_{\widetilde{N},\Omega}$ durch*

$$\psi_z(b,t) := \rho_z(t)\psi(b)$$

erweitern.

Lemma 3.8.6. *Sei ψ ein Eigenspinor des Diracoperators D_B zum Eigenwert λ und es bezeichne ψ_z für eine ganze Zahl z das in Bemerkung 3.8.5 beschriebene auf $\Gamma(S_{\widetilde{N},\Xi})$ oder $\Gamma(S_{\widetilde{N},\Omega})$ erweiterte Spinorfeld. Dann gilt:*

1. $\Big[D_B(\overline{(\psi_z)_t})\Big]^\sim = \lambda\psi_z$,
2. $\dot\psi_z = \begin{cases} iz\psi_z, & \textit{falls Spinstruktur von } \Xi \textit{ induziert ist}\\ i\frac{2z-1}{2}\psi_z, & \textit{falls Spinstruktur von } \Omega \textit{ induziert ist,}\end{cases}$
3. $\ddot\psi_z = \begin{cases} -z^2\psi_z, & \textit{falls Spinstruktur von } \Xi \textit{ induziert ist}\\ -(\frac{2z-1}{2})^2\psi_z, & \textit{falls Spinstruktur von } \Omega \textit{ induziert ist.}\end{cases}$

Beweis. Die erste Behauptung folgt wegen

$$
\begin{aligned}
\big[D_B(\overline{(\psi_z)_t})\big]^\sim(b,t) &= \big[D_B(\overline{(\rho_z(t)\psi(b))_t})\big]^\sim = \big[D_B(\rho_z(t)\psi(b))\big]^\sim\\
&= \big[\rho_z(t)D_B(\psi(b))\big]^\sim = \big[\rho_z(t)\lambda\psi(b)\big]^\sim = \lambda\psi_z(b,t).
\end{aligned}
$$

Die zweite und dritte Behauptung sind elementare Rechnungen. So gilt beispielsweise für die von Ξ induzierte Spinstruktur

$$\dot{\psi}_z(b,t) = \dot{\rho}_z(t)\psi(b) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{izt})\psi(b) = iz\psi_z(b,t)$$
$$\text{und } \ddot{\psi}_z(b,t) = iz\dot{\rho}_z(t)\psi(b) = iz(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{izt})\psi(b) = z^2\psi_z(b,t).$$

□

Satz 3.8.7. *Seien B eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, $\psi \not\equiv 0$ ein Eigenspinor von D_B zum Eigenwert λ und $z \in \mathbb{Z}$.*

1. *Zuerst sei die von Ξ induzierte Spinstruktur betrachtet.*
   Für $z \neq 0$ sei $\mu_{\lambda,z} := \sqrt{\lambda^2 + \epsilon_n\sigma^2 z^2}$. Dann ist das Spinorfeld
   $$\Psi_{z+} := ((\lambda + \mu_{\lambda,z})\psi_z, -\epsilon_2\tau_2\sigma z\psi_z)$$
   ein Eigenspinor von $\widetilde{D}_\Xi$ zum Eigenwert $\mu_{\lambda,z}$.
   Ist $\mu_{\lambda,z} \neq 0$, so ist ein Eigenspinor zum Eigenwert $-\mu_{\lambda,z}$ durch
   $$\Psi_{z-} := ((\lambda - \mu_{\lambda,z})\psi_z, -\epsilon_2\tau_2\sigma z\psi_z)$$
   gegeben.
   Ist $z = 0$, so sind die Spinorfelder $\Psi_0 = (\psi_0, 0)$ und $\Phi_0 = (0, \psi_0)$ Eigenspinoren von $\widetilde{D}_\Xi$ zum Eigenwert λ und $-\lambda$.
2. *Sei nun die von Ω induzierte Spinstruktur betrachtet.*
   Für $\mu_{\lambda,z} := \sqrt{\lambda^2 + \epsilon_n\sigma^2\left(\frac{2z+1}{2}\right)^2}$ ist das Spinorfeld
   $$\Psi_{z+} := \left((\lambda + \mu_{\lambda,z})\psi_z, -i\epsilon_2\tau_2\sigma\frac{2z+1}{2}\psi_z\right)$$
   ein Eigenspinor von $\widetilde{D}_\Omega$ zum Eigenwert $\mu_{\lambda,z}$.
   Ist $\mu_{\lambda,z} \neq 0$, so ist ein Eigenspinor zum Eigenwert $-\mu_{\lambda,z}$ durch
   $$\Psi_{z-} := \left((\lambda - \mu_{\lambda,z})\psi_z, -i\epsilon_2\tau_2\sigma\frac{2z+1}{2}\psi_z\right)$$
   gegeben.

Beweis. Da die Beweise für die von Ξ und von Ω induzierten Spinstrukturen fast identisch sind, es muß lediglich an geeigneten Stellen z durch $\frac{2z+1}{2}$ ersetzt werden, wird der Beweis im folgenden nur für die von Ξ induzierte Spinstruktur geführt. Sei mit der zusätzlichen Annahme $z \neq 0$ begonnen. Dieser Fall ist für $\widetilde{D}_\Omega$ nicht auszuschließen, da stets $\frac{2z+1}{2} \neq 0$ gilt.

Zunächst sind $(\psi_z, 0)$ und $(0, -\psi_z)$ Eigenspinoren des quadrierten Diracoperoperators zum Eigenwert $\mu^2_{\lambda,z} = \lambda^2 + \epsilon_2\sigma^2 z^2$:

$$\widetilde{D}^2(\psi_z, 0) = \left[\left(D^2_B(\bar{\psi}_z)_{t1}, 0\right)\right]^{\sim} - \epsilon_2\sigma^2\ddot{\psi}_z = \lambda^2(\psi_z, 0) + \epsilon_2\sigma^2 z^2(\psi_z, 0)$$

und analog für $(0, -\psi_z)$. Mit Hilfe der dritten binomischen Formel folgt nun, daß die Spinoren

$$\Psi_{z+} := (\widetilde{D}_\Xi + \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})(\psi_z, 0) \text{ und } \Phi_{z+} := (\widetilde{D}_\Xi + \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})(0, -\psi_z)$$

mögliche Eigenspinoren von $\widetilde{D}_\Xi$ zum Eigenwert $\mu_{\lambda,z}$ sind. Die Spinoren Ψ_{z+} und Φ_{z+}, die im folgenden als Spaltenvektoren geschrieben seien, spannen dieselben Eigenräume auf, denner Ansatz

$$\alpha\Psi_{z+} + \beta\Phi_{z+} = \alpha \begin{pmatrix} \lambda + \mu_{\lambda,z} \\ -\epsilon_2\tau_2\sigma z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \epsilon_2\tau_2\sigma z \\ \lambda - \mu_{\lambda,z} \end{pmatrix} = 0$$

liefert die Lösungen $\beta = -\frac{\alpha(\lambda+\mu_{\lambda,z})}{\epsilon_2\tau_2\sigma z}$ für beliebiges α liefert. Die Spinoren Ψ_{z+} und Φ_{z+} sind somit linear abhängig.

Nun muß noch nachgewiesen werden, daß Ψ_{z+} nicht trivial ist. Nach Annahme ist $z \neq 0$ und ψ ein nicht trivialer Spinor. Somit sind auch ψ_z und $-\epsilon_2\tau_2\sigma z$ nicht trivial. Das impliziert, daß Ψ_{z+} nicht trivial ist.

Sei nun $z = 0$. Dann folgt mit der Formel für den Diracoperator aus Satz 3.6.4 wegen $\dot{\psi}_0 = 0$ die Behauptung für die beiden Spinoren Ψ_0 und Φ_0. □

Satz 3.8.8. *Seien* dim $B^{n-1,\hat{k}} = 2m$, ψ *ein Eigenspinor von* D_B *zum Eigenwert* λ *und* $z \in \mathbb{Z}$

1. *Sei die von* Ξ *induzierten Spinstruktur betrachtet.*
   Wird $\mu_{\lambda,z} := \sqrt{\lambda^2 + \epsilon_n\sigma^2 z^2}$. *für* $z \neq 0$ *gesetzt, so ist*

   $$\Psi_{z+} := \lambda\psi_z + (-1)^{m+1}\epsilon_n\tau_n\sigma z \urcorner(\psi_z) + \mu_{\lambda,z}\psi_z$$

   ein Eigenspinor des Diracoperators $\widetilde{D}_\Xi$ *zum Eigenwert* $\mu_{\lambda,z}$.
   Das Spinorfeld

   $$\Psi_{z-} := \lambda\psi_z + (-1)^{m+1}\epsilon_n\tau_n\sigma z \urcorner(\psi_z) - \mu_{\lambda,z}\psi_z$$

   ist ein Eigenspinor des Diracoperators zum Eigenwert $-\mu_{\lambda,z}$.
   Ist $z = 0$, *so ist* $\Psi_0 := \psi_0$ *ein Eigenspinor zum Eigenwert* $\mu_{\lambda,z} = \lambda$.
2. *Sei die von* Ω *induzierte Spinstruktur betrachtet.*
   Für $\mu_{\lambda,z} := \sqrt{\lambda^2 + \epsilon_n\sigma^2\left(\frac{2z+1}{2}\right)^2}$. *sind die Spinoren*

   $$\Psi_{z+} := \lambda\psi_z + (-1)^{m+1}\epsilon_n\tau_n\sigma\frac{2z+1}{2}\urcorner(\psi_z) + \mu_{\lambda,z}\psi_z$$
   $$\Psi_{z-} := \lambda\psi_z + (-1)^{m+1}\epsilon_n\tau_n\sigma\frac{2z+1}{2}\urcorner(\psi_z) - \mu_{\lambda,z}\psi_z$$

   Eigenspinoren des Diracoperators $\widetilde{D}_\Omega$ *mit Eigenwerten* $\mu_{\lambda,z}$ *beziehungsweise* $-\mu_{\lambda,z}$.

Beweis. Da beide Behauptungen fast identisch bewiesen werden, sei im folgenden lediglich die erste gezeigt. Zunächst folgt aus der Formel für das Quadrat des Diracoperators aus Korollar 3.8.4, daß ψ_z ein Eigenspinor von D^2_Ξ zum Eigenwert $\mu^2_{\lambda,z} = \lambda^2 + \epsilon_n\sigma^2 z^2$ ist. Damit folgt

$(\widetilde{D}_\Xi^2 - \mu_{\lambda,z}^2 \,\mathrm{Id})\psi_z = 0$. Nun kann wiederum mit Hilfe der dritten binomischen Formel gefolgert werden, daß

$$\begin{aligned}
0 &= (\widetilde{D}_\Xi \pm \mu_{\lambda,z} \,\mathrm{Id})(\widetilde{D}_\Xi \psi_z \mp \mu_{\lambda,z}\psi_z) \\
&= (\widetilde{D}_\Xi \pm \mu_{\lambda,z} \,\mathrm{Id}) \left(\left[D_B(\overline{(\psi_z)}_t) \right]^{\sim} + (-1)^m i \epsilon_n \tau_n \sigma \urcorner(\dot{\psi}_z) \mp \mu_{\lambda,z}\psi_z \right) \\
&= (\widetilde{D}_\Xi \pm \mu_{\lambda,z} \,\mathrm{Id}) \left(\rho_z D_B(\psi) + (-1)^m i \epsilon_n \tau_n \sigma \urcorner(iz\psi_z) \mp \mu_{\lambda,z}\psi_z \right) \\
&= (\widetilde{D}_\Xi \pm \mu_{\lambda,z} \,\mathrm{Id}) \left(\rho_z \lambda\psi + (-1)^{m+1} \epsilon_n \tau_n \sigma z \urcorner(\psi_z) \mp \mu_{\lambda,z}\psi_z \right) \\
&= (\widetilde{D}_\Xi \pm \mu_{\lambda,z} \,\mathrm{Id}) \left(\lambda\psi_z + (-1)^{m+1} \epsilon_n \tau_n \sigma z \urcorner(\psi_z) \mp \mu_{\lambda,z}\psi_z \right)
\end{aligned}$$

gilt. Damit sind die Spinoren $\Psi_{z\pm}$ Eigenspinoren von $\widetilde{D}_\Xi$ zum Eigenwert $\pm\mu_{\lambda,z}$, falls sie nicht trivial sind.
Es ist nun angenommen, daß für $z \neq 0$ der Spinor Ψ_{z+} trivial ist. Wird der Eigenspinor ψ von D_B in seinen positiven und negativen Weylspinor ψ^+ und ψ^- zerlegt, so folgt die Gleichung

$$0 = (\lambda + \mu_{\lambda,z})(\rho_n\psi^+, \rho_n\psi^-) + (-1)^{m+1}\epsilon_n\tau_n\sigma z \urcorner(\rho_n\psi^+, \rho_n\psi^-)),$$

aus der die beiden Komponentengleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda + \mu_{\lambda,z} &= (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma z \\
\lambda + \mu_{\lambda,z} &= (-1)^{m+1} \epsilon_n \tau_n \sigma z
\end{aligned}$$

abzulesen sind. Hier ist zu sehen, daß $z = 0$ gelten muß. Analog folgt aus der Annahme $z \neq 0$ und $\Psi_{z-} \equiv 0$ der Widerspruch $z = 0$.

Daß im Fall $z = 0$ das Spinorfeld Ψ_0 ein Eigenspinor von $\widetilde{D}_\Xi$ zum Eigenwert λ ist, folgt aus $\dot{\Psi} \equiv 0$ und der Formel des Diracoperators, wie sie in Satz 3.6.2 angegeben wurde. □

Satz 3.8.9. *Seien* dim $B^{n-1,\hat{k}} = 2m - 1 > 1$, ψ *ein nicht trivialer Eigenspinor von* D_B *zum Eigenwert* λ *und* $z \in \mathbb{Z}$.

1. *Es sei die von* Ξ *induzierte Spinstruktur betrachtet.*
   Für $\mu_{\lambda,z} := \sqrt{\lambda^2 + \epsilon_n\sigma^2 z^2}$ *ist das Spinorfeld*

   $$\Psi_{z+} := ((\lambda + \mu_{\lambda,z})\psi_z, (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma z \urcorner(\psi_z))$$

   ein Eigenspinor von $\widetilde{D}_\Xi$ *zum Eigenwert* $\mu_{\lambda,z}$.
   Ist $\mu_{\lambda,z} \neq 0$, *so ist ein Eigenspinor zum Eigenwert* $-\mu_{\lambda,z}$ *durch*

   $$\Psi_{z+} := ((\lambda - \mu_{\lambda,z})\psi_z, (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma z \urcorner(\psi_z))$$

   gegeben.
   Ist $z = 0$, *so sind die Spinorfelder* $\Psi_0 = (\psi_0, 0)$ *und* $\Phi_0 = (0, \urcorner(\psi_0))$ *Eigenspinoren von* $\widetilde{D}_\Xi$ *zum Eigenwert* λ *und* $-\lambda$.
2. *Die Spinstruktur auf* $\widetilde{N}$ *sei von* Ω *induziert.*
   Für $\mu_{\lambda,z} := \left(\lambda^2 + \epsilon_n\sigma^2 \left(\frac{2z+1}{2}\right)\right)^{1/2}$ *ist das Spinorfeld*

   $$\Psi_{z+} := \left((\lambda + \mu_{\lambda,z})\psi_z, (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma \frac{2z+1}{2} \urcorner(\psi_z) \right)$$

ein Eigenspinor von $\widetilde{D}_\Omega$ zum Eigenwert $\mu_{\lambda,z}$.
Ist $\mu_{\lambda,z} \neq 0$, so ist ein Eigenspinor zum Eigenwert $-\mu_{\lambda,z}$ durch

$$\Psi_{z+} := \Big((\lambda - \mu_{\lambda,z})\psi_z, (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma \frac{2z+1}{2} \urcorner(\psi_z)\Big)$$

gegeben.

Beweis. Die Behauptung wird wiederum nur im ersten der beiden Fälle ausführlich behandelt, da wie bisher für beide Spinstrukturen die Beweise analog verlaufen.

Als erstes ist aus der Formel für den quadrierten Diracoperator aus Korollar 3.8.4 offensichtlich, daß die Spinoren $(\psi_z, 0)$ und $(0, \urcorner(\psi_z))$ Eigenspinoren des quadrierten Diracoperators D_Ξ^2 zum Eigenwert $\mu_{\lambda,z}^2$ sind. Mit den Identitäten aus der dritten binomischen Formel folgen nun zum einen die Gleichungen, die zur Definition der Spinoren $\Phi_{z\pm}$ und Ψ_{z+} führen:

$$\begin{aligned}
0 &= (\widetilde{D}_\Xi \mp \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})\Big(\widetilde{D}_\Xi(\psi_z, 0) \pm \mu_{\lambda,z}(\psi_z, 0)\Big)\\
&= (\widetilde{D}_\Xi \mp \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})\\
&\quad \Big(\Big[(D_B(\overline{(\psi_z)_t}), 0)\Big]^{\sim} + (-1)^{m-1} i \epsilon_n \tau_n \sigma(\urcorner(0), \urcorner(\dot{\psi}_z)) \pm \mu_{\lambda,z}(\psi_z, 0)\Big)\\
&= (\widetilde{D}_\Xi \mp \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})\Big((\lambda \pm \mu_{\lambda,z})(\psi_z, 0) + (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma z(0, \urcorner(\psi_z))\Big)\\
&= (\widetilde{D}_\Xi \mp \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})\Phi_{z\pm},
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
0 &= (\widetilde{D}_\Xi \mp \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})\Big(\widetilde{D}_\Xi(0, \urcorner(\psi_z)) \pm \mu_{\lambda,z}(0, \urcorner(\psi_z))\Big)\\
&= (\widetilde{D}_\Xi \mp \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})\\
&\quad \Big(\Big[(0, -\urcorner D_B(\overline{(\psi_z)_t}))\Big]^{\sim} + (-1)^{m-1} i \epsilon_n \tau_n \sigma(\dot{\psi}_z, 0) \pm \mu_{\lambda,z}(0, \urcorner(\psi_z))\Big)\\
&= (\widetilde{D}_\Xi \mp \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})\Big((-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma z(\psi_z, 0) \pm (\mu_{\lambda,z} - \lambda)(0, \urcorner(\psi_z))\Big)\\
&= (\widetilde{D}_\Xi \mp \mu_{\lambda,z}\,\mathrm{Id})\Psi_{z\pm}.
\end{aligned}$$

Damit sind $\Psi_{z\pm}$ und $\Phi_{z\pm}$ als potentielle Eigenspinoren nachgewiesen. Die beiden Spinorfelder Ψ_{z+} und Φ_{z+} sind, genau wie in Satz 3.8.7, linear abhängig. Gleiches gilt für die Spinoren Ψ_{z-} und Φ_{z-}, doch soll die lineare Abhängigkeit nur im ersten Fall nachgewiesen werden. Dazu sei der Spinor ψ in seinen positiven und negativen Weylspinor zerlegt. Dann gilt:

$$\alpha \begin{pmatrix} (\lambda + \mu_{\lambda,z})\rho_z(\psi^+ + \psi^-) \\ (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma z \rho_z(\psi^+ - \psi^-) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma z \rho_z(\psi^+ + \psi^-) \\ (\lambda + \mu_{\lambda,z})\rho_z(\psi^+ - \psi^-) \end{pmatrix} = 0.$$

Dieses Gleichungssystem wird für beliebiges α durch $\beta = -\frac{\alpha(\lambda+\mu_{\lambda,z})}{\epsilon_2\tau_2\sigma z}$ gelöst.

Der nächste Schritt, der Nachweis, daß keine trivialen Spinoren vorliegen, wird nur für den Spinor Ψ_{z+} geführt, da der Fall Ψ_{z-} analog bewiesen wird. Für $z \neq 0$ sei nun angenommen, daß das Spinorfeld Ψ_{z+} trivial ist. Da ψ ein nicht trivialer Eigenspinor ist, folgt, daß ψ_z nicht trivial ist. Damit sind beide Komponenten von Ψ_{z+} nicht trivial, da $\lambda + \mu_{\lambda,z} \neq 0 \neq (-1)^m \epsilon_n \tau_n \sigma z$ gilt.

Der Fall $z = 0$ wird direkt mit der Formel für den Diracoperator $\widetilde{D}_\Xi$ aus Satz 3.6.4 bewiesen und folgt aus der Tatsache, daß $\dot{\psi}_z = 0$ gilt für Ψ_0 und Φ_0. □

Für den Rest des Abschnitts werden nur noch Eigenwerte des Diracoperators auf $\widetilde{N}$ betrachtet, die durch die beschriebene Konstruktion entstehen. Diese Menge sei für $\Gamma \in \{\Xi, \Omega\}$ mit $\sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z},\Gamma} \subset \sigma(D_{\widetilde{N},\Gamma})$ bezeichnet.

Korollar 3.8.10. *Unabhängig von der Dimension des Blattes gilt für die Dimension des Eigenraumes E_μ zum Eigenwert $\mu \in \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Gamma})$:*

$$\dim\ E_\mu \geq \sum_{\mu_{\lambda_i,z_i}} \dim\ E_{\mu_{\lambda_i,z_i}}.$$

Beweis. Die Eigenräume zu verschiedenen Paaren $(\lambda_i, z_i) \neq (\lambda_j, z_j)$ sind verschieden, damit folgt die Behauptung. □

Korollar 3.8.11. *Es sind äquivalent:*

1. $0 \in \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Gamma})$
2. *In $\sigma(D_B) \times \mathbb{Z}$ ist die Gleichung $0 = \lambda^2 + \epsilon_n \sigma^2 a(z)^2$ lösbar, wobei $a(z) = z$ gilt, falls die Spinstruktur von Ξ induziert wird und $a(z) = \frac{2z+1}{2}$ gilt, falls die Spinstruktur von Ω induziert wird.*

Korollar 3.8.12.
Für $\epsilon_n = 1$ und $\Gamma = \Xi$ gelten die folgenden drei Aussagen:

1. $\sigma(D_B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \iff$ *Für alle $\sigma \in \mathbb{R}^+$ gilt:* $0 \notin \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Xi})$.
2. $\sigma(D_B) \cap i\mathbb{R} = \{0\} \iff$ *Für alle $\sigma \in \mathbb{R}^+$ gilt:* $0 \in \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Xi})$.
3. *In $\sigma(D_B) \cap i\mathbb{R}$ existiert ganau dann ein von Null verschiedenes Element, wenn die beiden Mengen $\{\sigma \in \mathbb{R}^+ \mid 0 \in \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Xi})\}$ und $\{\sigma \in \mathbb{R}^+ \mid 0 \notin \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Xi})\}$ nicht leer sind.*

Für $\epsilon_n = -1$ und $\Gamma = \Omega$ gelten die folgenden zwei Aussagen

1. $\sigma(D_B) \cap \mathbb{R} \subset \{0\} \iff$ *Für alle $\sigma \in \mathbb{R}^+$ gilt:* $0 \notin \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Omega})$.
2. *In $\sigma(D_B) \cap \mathbb{R}$ existiert ganau dann ein von Null verschiedenes Element, wenn die beiden Mengen $\{\sigma \in \mathbb{R}^+ \mid 0 \in \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Omega})\}$ und $\{\sigma \in \mathbb{R}^+ \mid 0 \notin \sigma_{\sigma(D_B),\mathbb{Z}}(D_{\widetilde{N},\Omega})\}$ nicht leer sind.*

3.9. **Einige erste Bemerkungen zum Spektrum des quadrierten Diracoperators auf $B \times_\sigma S^1$.**

Bemerkung 3.9.1. *In diesem Abschnitt ist unter σ wieder eine 2π-periodische Funktion von $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{R}^+$ zu verstehen. Außerdem bezeichne ψ ist stets einen Eigenspinor des Diracoperators D_B zum Eigenwert λ.*

Lemma 3.9.2. *Ist ψ ein Eigenspinor des Diracoperators D_B zum Eigenwert λ, so ist $f\psi$ ein Eigenspinor des quadrierten Diracoperators zum Eigenwert μ, falls f die Differentialgleichung mit 2π-periodischen Koeffizienten*

$$\epsilon_n \frac{\nu}{\sigma^2(t)} f(t) + \frac{\dot\sigma(t)}{\sigma(t)} \dot f(t) + \ddot f(t) = 0.$$

mit $\nu := \mu^2 - \lambda^2$ erfüllt.

Beweis. Die Behauptung folgt durch Abspalten von ψ aus

$$\begin{aligned} \mu^2 f(t)\psi(b) &= \widetilde{D}^2 \Psi(t,b) \\ &= \lambda^2 f(t)\psi(b) - \epsilon_n \dot\sigma(t)\sigma(t)\dot f(t)\psi(b) - \epsilon_n \sigma^2(t)\ddot f(t)\psi(b). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.9.3. *Die Differentialgleichung*

$$\epsilon_n \frac{\nu}{\sigma^2(t)} f(t) + \frac{\dot\sigma(t)}{\sigma(t)} \dot f(t) + \ddot f(t) = 0.$$

läßt sich in eine Hillsche Differentialgleichung transformieren:

$$\ddot g(t) + \left[\epsilon_n \frac{\nu}{\sigma^2(t)} - \left(\frac{\dot\sigma(t)}{2\sigma(t)}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\dot\sigma(t)}{2\sigma(t)}\right] g(t) = 0.$$

Beweis. Die Transformation ist $f(t) = g(t)\left(\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)}\right)^{1/2}$. □

Für den Rest des Abschnitts sei $a(t) := \epsilon_n \frac{\mu^2-\lambda^2}{\sigma^2(t)} - \left(\frac{\dot\sigma(t)}{2\sigma(t)}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\dot\sigma(t)}{2\sigma(t)}$ gesetzt.

Satz 3.9.4. *Für* dim $B^{n-1,\hat k} = 2m$ *sei* $\Psi(b,t) := g(t)(\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)})^{1/2}\psi(b)$.

1. *Dann ist Ψ ein Eigenspinor von $\widetilde{D}^2_\Xi$ zum Eigenwert μ^2, falls g eine 2π-periodische Funktion ist und $\ddot g(t) + a(t)g(t) = 0$ erfüllt.*
2. *Dann ist Ψ ein Eigenspinor von $\widetilde{D}^2_\Omega$ zum Eigenwert μ^2, falls g eine 2π-schiefperiodische Funktion ist und $\ddot g(t) + a(t)g(t) = 0$ erfüllt.*

Beweis. Die Funktion $f(t) = g(t)(\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)})^{1/2}\psi(b)$ löst die Differentialgleichung aus Lemma 3.9.2. Eine derartige Lösung liefert die Lösung $\Psi(b,t) := f(t)\psi(b)$ der Eigenwertgleichung des quadrierten Diracoperators auf $\widetilde{N}$. Daßg π-periodisch sein muß, wenn die Spinstruktur von Ξ induziert wird, und 2π-schiefperiodisch, falls die Spinstruktur von

Ω induziert wird, folgt aus der Tatsache, daß der konstruierte Spinor Ψ sonst nicht mit einem glatten Schnitt in $S_{\widetilde{N},\Xi}$ beziehungsweise $S_{\widetilde{N},\Omega}$ identifiert werden kann. Da die Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten im allgemeinen nicht periodisch sind, kann auf die Periodizitätsbedingung nicht verzichtet werden. $\square$

Im Fall ungerader Dimension von B folgt wegen der Formel des quadrierten Diracoperators auf $\widetilde{N}$ aus Lemma 3.8.3 die Differentialgleichung aus 3.9.2 in beiden Komponenten der Zerlegung $S_B \oplus \hat{S}_B$. Für eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien die Spinoren $\Psi(t,b) := (g(t)(\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)})^{1/2}\psi(b), 0)$ und $\Phi(b,t) = (0, g(t)(\frac{\sigma(0)}{\sigma(t)})^{1/2}\urcorner(\psi)(b))$ definiert.

Satz 3.9.5. *Gilt* $\dim\ B^{n-1,\hat{k}} = 2m-1$, *so sind*

1. Ψ *und* Φ *Eigenspinoren von* $\widetilde{D}^2_\Xi$ *zum Eigenwert* μ^2, *falls* g *eine* 2π-*periodische Funktion ist, die die gewöhnliche Differentialgleichung* $\ddot{g} + a(t)g(t) = 0$ *erfüllt.*
2. Ψ *und* Φ *Eigenspinoren von* $\widetilde{D}^2_\Omega$ *zum Eigenwert* μ^2, *falls* g *eine* 2π-*schiefperiodische Funktion ist und der gewöhnlichen Differentialgleichung* $\ddot{g} + a(t)g(t) = 0$ *genügt.*

Beweis. Der Beweis verläuft wie der Beweis von Satz 3.9.4. Die Argumentation wird in jeder Komponente von $\Delta_{2m-1,\hat{k}} \oplus \Delta_{2m-1,\hat{k}}$ separat gefuührt. $\square$

Bemerkung 3.9.6. *Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das Problem, die Eigenwerte von* $\widetilde{D}^2$ *auf dem Produktraum* $\widetilde{N}$ *für beide Spinstrukturen anzugeben, lediglich auf das äquivalente Problem zurückgeführt wurde, die Eigenwerte des zur gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\ddot{g}(t) - \left[\epsilon_n \frac{\lambda^2}{\sigma^2(t)} + \left(\frac{\dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\dot{\sigma}(t)}{2\sigma(t)}\right] g(t) = 0.$$

gehörenden Operators zu finden, deren zugehörige Eigenfunktionen 2π-*periodisch beziehungsweise* 2π-*schiefperiodisch sind.*

4.1. Eine erste Beispielklasse: rechteckige flache Tori.

Die in Abschnitt 3.8 entwickelte Methode soll nun am Beispiel der flachen rechteckigen Tori $T_{\mathbf{v}}^{n,k} = \mathbb{R}^{n,k}/\Gamma$ illustriert werden. Dabei ist Γ ein Gitter im $\mathbb{R}^{n,k}$, das von den Vektoren $\mathbf{v} = (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$ aufgespannt wird. Es werden also Mannigfaltigkeiten untersucht, die topologisch das n-fache Produkt von eindimensionalen Sphären sind. Ausgehend vom eindimesionalen Torus oder der eindimensionalen Sphäre ist es naheliegend, das Punktspektrum von $T_{\mathbf{v}}^{n,k}$ zu berechnen: Zunächst werden die eindimensionalen Gleichungen gelöst, dann wird Satz 3.8.7 angewandt, um Eigenspinoren auf zweidimensionalen Tori zu erhalten. Danach werden abwechselnd die Sätze 3.8.8 und 3.8.9 benutzt.

Nachdem das Punktspektrum auf dem zweidimensionalen Torus bestimmt ist, werden die zugehörigen Eigenraumdimensionen eingehender untersucht. Der Beweis von Satz 4.1.6 ist dabei eine Adaption eines Beweises, der von Christian Ohn und Anne-Joëlle Vanderwinden in [OV93] bei der Untersuchung von Eigenraumdimensionen des Diracoperators auf $S^3 \times S^1$ geführt wurde. Weiterhin werden hinreichende Kriterien für die Existenz harmonischer Spinoren angegeben.

Thomas Friedrich [Fri84] und Christian Bär [Bär91] haben das Punktspektrum und die Vielfacheiten der Eigenwerte des Diracoperators im riemannschen Fall untersucht. Helga Baum berechnete 1981 in [Bau81] das Punktspektrum der rechteckigen flachen Tori $T^{3,1}$. Sie benutzte dabei eine Idee, die auf Nigel Hitchin [Hit74] zurückgeht. Georg Heß hat dieses Verfahren in [Heß96] benutzt, um im Fall der rechteckigen flachen Tori $T_{\mathbf{v}}^{2n,k}$, $2n \geq 4$, das Punktspektrum und die Vielfachheiten der Eigenwerte anzugeben. Im Fall ungerader Dimensionen gibt er lediglich eine Menge möglicher Eigenwerte und obere Schranken der Vielfachheiten, so es sich um einen Eigenwerte handelt, an.

Notation 4.1.1. *Da bei jeder Faktorisierung $\mathbb{R} \to S^1$ eine von Ξ oder von Ω induzierte Spinstruktur gewählt werden kann, existieren auf dem n-dimensionalen Torus 2^n Spinstrukturen. Sie werden in diesem Abschnitt durch die n-Tupel $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \{0,1\}^n$ unterschieden. Wird das Gitter von den Vektoren $v_i = \lambda_i e_i$ aufgespannt, und bei der Faktorisierung in e_i-Richtung die von Ξ induzierte Spinstruktur gewählt, so sei $\delta_i = 0$. Wird die Spinstruktur von Ω induziert, so sei $\delta_i = 1$.*

Das Gitter Γ wird stets von $\mathbf{v} = (v_1 = \lambda_1 e_1, \dots, v_n = \lambda_n e_n)$ erzeugt. Somit wird das zu Γ duale Gitter Γ^* von den zu $v_j = \lambda_j e_j$ dualen Vektoren $\mathbf{v}^* = (\lambda_1^{-1} e_1^\perp, \dots, \lambda_n^{-1} e_n^\perp)$ aufgespannt.

Auf $\mathbb{R}^{n,k}$ wird durch $|x|_{n,k} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{n,k}}$ eine Abbildung definiert, die im Fall $k = 0$ die euklidische Norm liefert.

Ziel dieses Abschnitts ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4.1.2. *Das Punktspektrum des Diracoperators auf dem rechteckigen flachen Torus $T^{n,k}_{\mathbf{v}\delta}$ ist in Abhängigkeit von der Spinstruktur auf folgende Art und Weise charakterisiert:*

$$\sigma_p(T^{n,k}_{\mathbf{v}\delta}, D) = \left\{ \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \left(\frac{2z_i - \delta_i}{2\lambda_i}\right)^2} \;\middle|\; z_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Die Vielfachheit des zum n-Tupel $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ gehörigen Eigenwerts ist 2^{m-1} mit $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Sei nun zunächst der eindimensionale Fall untersucht.

Lemma 4.1.3. *Das Punktspektrum des Diracoperators D auf dem flachen Torus $T^{1,k}_{\mathbf{v}\delta}$ ist $\left\{-\epsilon_1\tau_1\frac{2z+\delta_1}{2\lambda_1} \mid z \in \mathbb{Z}\right\}$. Jeder Eigenraum ist eindimensional, der zu $-\epsilon_1\tau_1\frac{2z+\delta_1}{2\lambda_1}$ gehörige Eigenraum ist von $f(x) = e^{i\frac{2z+\delta_1}{2\lambda_1}}$ aufgespannt.*

Beweis. Der Vektor $\mathbf{v} = v_1 = \lambda_1 e_1$ spannt das Gitter $\Gamma_{\mathbf{v}}$ auf. Der zu $\mathbb{R}^{1,k}$ assoziierte Spinormodul $\Delta_{1,k}$ hat die komplexe Dimension 1 und die Cliffordalbra liefert zwei Spinordarstellungen $\kappa_{1,k}$ und $\hat{\kappa}_{1,k}$, die für $z \in \Delta_{1,k}$ durch $\kappa(e_1)(z) = \tau_1 iz$ beziehungsweise $\hat{\kappa}(e_1)(z) = -\tau_1 iz$ gegeben sind. Wie im letzten Kapitel üblich seien Spinorfelder auf $T^{1,k}_{\mathbf{v}\delta}$ mit komplexwertigen Funktionen f auf $\mathbb{R}$ identifiziert. Hierbei ist f für $\delta_1 = 0$ eine $2\pi\lambda_1$-periodische und für $\delta_1 = 1$ und $2\pi\lambda_1$-schiefperiodisch Funktion. Der Diracoperator D auf $T^{1,k}_{\mathbf{v}\delta}$ ist dann durch $Df = \epsilon_1\tau_1 i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}f$ gegeben. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Operators sind nun allgemein bekannt. Aus der Periodizitätsbedingung an f folgt für $z \in \mathbb{Z}$, daß für eine Eigenfunktion zum Eigenwert $-\epsilon_1\tau_1\frac{2z+\delta_1}{2\lambda_1}$ durch $f(x) = e^{i\frac{2z+\delta_1}{2\lambda_1}x}$ gegeben ist. Da die gewöhnliche Differentialgleichung $f(x) = af'(x)$ für konstantes a nach Vorgabe einer Anfangsbedingung bekanntlich genau eine Lösung hat, haben die obigen Eigenwerte alle einfache Vielfachheit. □

Bevor der zweidimensionale Torus untersucht wird, sei die folgende Bemerkung gemacht:

Bemerkung 4.1.4. *Sind $v_1 = \lambda_1 e_1, \dots, v_n = \lambda_n e_n$ linear unabhängige Vekoren des $\mathbb{R}^{n,k}$, so ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^{n,k} \to \mathbb{C}$, die in jede Richtung e_j $2\pi\lambda_j$-periodisch ist, mit Hilfe der dualen Vektoren $v_1^*, \dots, v_n^*$ gegeben: $f(x) = e^{i(\sum \beta_j v_j^*(x))}$, $\beta_j \in \mathbb{Z}$. Soll die Funktion in e_j-Richtung gemäß δ_j eine $2\pi\lambda_j$-periodische oder $2\pi\lambda_j$-schiefperiodische Funktion sein, so sei $f(x) = e^{i(\sum \frac{2\beta_j - \delta_j}{2} v_j^*(x))}$ betrachtet. Wird diese Funktion in e_j-Richtung abgeleitet, so ergibt sich $\nabla_{e_j} f(x) = i\frac{2\beta_j - \delta_j}{2\lambda_j} f(x)$. Die Vektoren v_j sind in der Metrik des flachen Torus zwar paarweise orthogonal, aber sie sind nicht normiert. Die Vektoren $\frac{v_j}{\langle v_j, v_j\rangle_{n,k}} = (v_j^*)^\perp$ bilden eine Orthonormalbasis.*

Es sei nun $T^{2,k}_{\mathbf{v}\delta}$ als das Produkt $T^{1,k_1}_{v_1\delta_1} \times T^{1,k_2}_{v_2\delta_2}$ beziehungsweise als das Produkt $T^{1,k_1}_{v_1\delta_1} \times_{\lambda_2^{-1}} S^{1,k_2}_{\delta_2}$ aufgefaßt. Mit Hilfe von Satz 3.8.7 werden die folgenden Eigenspinoren, Eigenwerte und Eigenraumdimensionen des Diracoperators bestimmt:

Satz 4.1.5. *Das Punktspektrum des Diracoperators auf dem rechteckigen flachen Torus $T^{2,k}_{\mathbf{v}\delta}$ enthält in Abhängigkeit von der Spinstruktur $\delta = (\delta_\mathbf{1}, \delta_\mathbf{2})$ die Werte $\pm\mu_{z_1,z_2} = \pm\sqrt{\epsilon_1(\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1})^2 + \epsilon_2(\frac{2z_2-\delta_2}{2\lambda_2})^2}$ für ganze Zahlen z_1 und z_2. Die Vielfachheit der Eigenwerte $\pm\mu_{z_1,z_2}$ ist mindestens 1, ein Eigenspinor zum Eigenwert μ_{z_1,z_2} für $z_2 \neq 0$ ist*

$$\Psi_{z_1,z_2}(x,y) := \begin{pmatrix} \epsilon_1\tau_1\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1} + \mu_{z_1,z_2} \\ -i\epsilon_2\tau_2\frac{2z_2-\delta_1}{2\lambda_2} \end{pmatrix} e^{i\frac{2z_2-\delta_2}{2}y} e^{i\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1}x}.$$

Ein Eigenspinor zum Eigenwert $-\mu_{z_1,z_2}$ ist durch

$$\Phi_{z_1,z_2}(x,y) := \begin{pmatrix} \epsilon_1\tau_1\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1} - \mu_{z_1,z_2} \\ -i\epsilon_2\tau_2\frac{2z_2-\delta_1}{2\lambda_2} \end{pmatrix} e^{i\frac{2z_2-\delta_2}{2}y} e^{i\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1}x}$$

außer für $\delta_1 = z_2 = 0$ gegeben. In diesem Fall sind Eigenspinoren zu λ_1 und $-\lambda_1$ durch $(e^{i\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1}x}, 0)$ und $(0, e^{i\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1}x})$ gegeben.

Beweis. Die Behauptung ist lediglich eine Umformulierung von Theorem 3.8.7 unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Lemma 4.1.3.

1. $\lambda = -\epsilon_1\tau_1(2z_1 - \delta_1)/(2\lambda_1)$ ist ein Eigenwert des Diracoperators auf $T^{1,k_1}_{v_1\delta_1}$ mit zugehörigem Eigenspinor $\psi_{z_1}(x) = e^{i\frac{2z_1+\delta_1}{2\lambda_1}x}$.
2. Für die in unserem Fall konstante Funktion σ aus Satz 3.8.7 gilt $\sigma \equiv \lambda_2^{-1}$.
3. Für den auf den Produktraum $T^{1,k_1}_{v_1\delta_1} \times S^{1,k_2}_{\delta_2}$ erweiterte Spinor gilt $\psi_{z_1 z2}(x,y) = e^{i\frac{2z_2-\delta_2}{2}y} e^{i\frac{z_1-\delta_1}{2\lambda_1}x}$.

□

Wie im letzten Kapitel bezeichne $\sigma_{\sigma(D_{T^1}),\mathbb{Z}}(D_{T^2}, \delta)$ die Menge der so konstruierbaren Eigenwerte.

Satz 4.1.6. *Für $\lambda \in \sigma_{\sigma(D_{T^1}),\mathbb{Z}}(D_{T^2}, \delta)$ gilt:*

1. *Ist $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$, so treten nur endlich viele Paare (z_1, z_2) auf, die denselben Eigenwert λ liefern.*
2. *Ist $(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^2 \in \mathbb{Q}$, aber $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$, so existieren unendlich viele Zahlenpaare, die den Eigenwert λ liefern, falls $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ gilt. Gilt stattdessen $\epsilon_1 = \epsilon_2$, so gibt es nur endlich viele Zahlenpaare, die den Eigenwert λ liefern.*
3. *Ist $(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^2 \notin \mathbb{Q}$, so existieren nur die folgenden vier Zahlenpaare, die den Eigenwert λ liefern: (z_1, z_2), $(-z_1 + \delta_1, z_2)$, $(z_1, -z_2 + \delta_2)$ und $(-z_1 + \delta_1, -z_2 + \delta_2)$*

Beweis. Es werden die Fälle $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ und $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$ bewiesen, die Beweise der beiden anderen Fälle verlaufen analog.

Gesucht ist ein ganzzahliges Lösungspaar (z_1, z_2) von

$$\lambda^2 = \epsilon_1 \left(\frac{2z_1 - \delta_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \epsilon_2 \left(\frac{2z_2 - \delta_2}{2\lambda_2}\right)^2 . \tag{4.1}$$

Zunächst sei $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ mit s, $t \in \mathbb{N}$ teilerfremd.
Seien $M := \min\{\frac{1}{4\lambda_1^2}; \frac{1}{4\lambda_2^2}\}$, $u := \frac{1}{4M\lambda_1^2}$ und $v := \frac{1}{4M\lambda_2^2}$. Dann gilt:

$$\{u, v\} \in \left\{\left\{1; \left(\frac{s}{t}\right)^2\right\}; \left\{1; \left(\frac{t}{s}\right)^2\right\}\right\}.$$

Daraus folgt mit $w_i = 2z_i - \delta_i$

$$\frac{\lambda^2}{M} = \left(\sqrt{\epsilon_1 u} w_1 + \sqrt{-\epsilon_2 v} w_2\right)\left(\sqrt{\epsilon_1 u} w_1 - \sqrt{-\epsilon_2 v} w_2\right).$$

Wird nun der Fall $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$ mit $u = 1$ betrachtet, so folgt:

$$4t^2\lambda^2\lambda_1^2 = (tw_1 + sw_2)(tw_1 - sw_2).$$

Für jede Lösung $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ von Gleichung 4.1 sind dann die Faktoren $(tw_1 + sw_2)$ und $(tw_1 - sw_2)$ ganzzahlig. Existiert nun eine Lösung $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ von Gleichung 4.1, so ist $4t^2\lambda^2\lambda_1^2$ ganzzahlig. Da jede ganze Zahl nur endlich viele Teiler besitzt, kann es dann neben (z_1, z_2) nur endlich viele weitere Lösungen von Gleichung 4.1 geben.
Der Fall $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$ mit $v = 1$ führt auf die Gleichung

$$4s^2\lambda^2\lambda_2^2 = (tw_1 + sw_2)(tw_1 - sw_2),$$

aus der die Bhauptung mit gleicher Argumentation folgt.

Im Fall $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ existieren ebenfalls höchstens endlich viele Teiler, die Beweisidee wird von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}[i]$ übertragen.

Sei nun $(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^2 \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$.
Es ist nun $(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^2 = \frac{s}{t}$ mit s, $t \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{ggt}(s,t) = 1$ angenommen. Mit M, u und v wie oben folgt nun aus Gleichung 4.1:

$$\frac{\lambda^2}{M} = \frac{1}{M}\left(\epsilon_1 \left(\frac{2z_1 - \delta_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \epsilon_2 \left(\frac{2z_2 - \delta_2}{2\lambda_2}\right)^2\right).$$

Für $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = u = 1$ ergibt sich dann:

$$4t\lambda^2\lambda_1^2 = t(2z_1 - \delta_1)^2 - s(2z_2 - \delta_2)^2.$$

Bekanntlich hat die Pellsche Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ eine durch die natürlichen Zahlen l indizierte Lösungsmenge (x_l, y_l), wenn D nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl ist ([Mor69], S. 53): Es existiert eine von $(1, 0)$ verschiedene Lösung (x_1, y_1) mit deren Hilfe die Lösung (x_l, y_l) durch $x_l + \sqrt{D}y_l = (x_1 + \sqrt{D}y_1)^l$ angegeben werden kann. Nach [OV93], Seite 267, ist für $l \equiv 0 \mod 2$ die Zahl x_l stets ungerade und die Zahl

y_l stets gerade. Wird $D = st$ gesetzt, so ist D kein Quadrat einer natürlichen Zahl, da s und t teilerfremd sind und $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$ gilt. Liegt nun eine Lösung $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung $\lambda^2 = (\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1})^2 - (\frac{2z_2-\delta_2}{2\lambda_2})^2$ vor, so ist für gerades l auch (z_3, z_4) mit

$$z_3 := \frac{1}{2}(x_l(2z_1 - \delta_1) - sy_l(2z_2 - \delta_2) + \delta_1)$$
$$z_4 := \frac{1}{2}(x_l(2z_2 - \delta_2) - ty_l(2z_1 - \delta_1) + \delta_2)$$

eine Lösung. Die Ganzzahligkeit von z_3 und z_4 folgt aus der Bemerkung, daß $x_l(2z_i - \delta_i) + \delta_i$, $sy_l(2z_i - \delta_i)$ und $ty_l(2z_i - \delta_i)$ stets gerade sind.
Daß im Fall $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ höchstens endlich viele Lösungen existieren, folgt aus der Tatsache, daß nur endlich viele ganze Zahlen z_1, z_2 mit $(\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1})^2 + (\frac{2z_2-\delta_2}{2\lambda_2})^2 \leq \lambda^2$ existieren.

Sei schließlich $(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^2 \notin \mathbb{Q}$.
Sind (z_1, z_2) und (z_3, z_4) mögliche Lösungen von Gleichung 4.1, so gilt

$$\epsilon_1(\frac{2z_1 - \delta_1}{2\lambda_1})^2 + \epsilon_2(\frac{2z_2 - \delta_2}{2\lambda_2})^2 = \epsilon_1(\frac{2z_3 - \delta_1}{2\lambda_1})^2 + \epsilon_2(\frac{2z_4 - \delta_2}{2\lambda_2})^2.$$

Damit folgt $\epsilon_1 \frac{(2z_1-\delta_1)^2-(2z_3-\delta_1)^2}{(2\lambda_1)^2} = \epsilon_2 \frac{(2z_4-\delta_2)^2-(2z_2-\delta_2)^2}{(2\lambda_2)^2}$. Gilt nun weiterhin $(z_1 - \delta_1)^2 \neq (2z_3 - \delta_1)^2$ oder $(2z_2 - \delta_2)^2 \neq (2z_4 - \delta_2)^2$, so ergibt sich $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2 \in \mathbb{Q}$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Daraus folgt $(2z_1 - \delta_1)^2 = (2z_3 - \delta_1)^2$ und $(2z_2 - \delta_2)^2 = (2z_4 - \delta_2)^2$. Dies entspricht genau den vier angegebenen Lösungen. $\square$

Im folgenden Korollar wird untersucht, wann $0 \in \sigma_{\sigma(D_{T^1}),\mathbb{Z}}(D)$ gilt.

Korollar 4.1.7. *Für die Existenz harmonischer Spinoren lassen sich nun die folgenden Kriterien ableiten:*

1. *In demFällen $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \pm 1$ können harmonische Spinoren nur bezüglich der trivialen Spinstruktur $\delta = (0,0)$ auftreten. Es gibt dann genau zwei harmonische Spinoren.*
2. *In den beiden semiriemannschen Fällen mit $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \pm 1$ muß eine Fallunterscheidung nach der Spinstruktur gemacht werden.*
   - $\delta = (0,0)$
     Es gibt mindestens zwei nicht triviale Spinoren zum Eigenwert Null, nämlich diejenigen, die zu dem Tupel $(z_1, z_2) = (0,0)$ gehören. Es gibt jedoch noch weitere harmonische Spinoren, wenn die Gleichung

     $$\left(\frac{z_1}{\lambda_1}\right)^2 = \left(\frac{z_2}{\lambda_2}\right)^2$$

     mit $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ lösbar ist. Der Eigenraum der harmonischen Spinoren ist dann unendlichdimensional.

- $\delta \in \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$
  Es gibt harmonische Spinoren, wenn die Gleichung
  $$\left(\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1}\right)^2 = \left(\frac{2z_2-\delta_2}{\lambda_2}\right)^2$$
  in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ Lösungen besitzt. Der Raum der harmonischen Spinoren ist unendlichdimensional

Es sei noch einmal bemerkt, das die Kriterien im semiriemannschen Fall lediglich hinreichend sind, da die Konstruktion nur in diesen Fällen harmonische Spinoren liefert. Es wurde nicht gezeigt, das keine harmonischen Spinoren existieren, wenn sie sich nicht auf dem beschriebenen Weg konstruieren lassen.

Beweis. Im Fall $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \pm 1$ und $\delta \neq (0,0)$ Behauptungen eine direkte Konsequenz der Formel $\mu_{z_1,z_2} := \sqrt{\epsilon_1(\frac{2z_1-\delta_1}{2\lambda_1})^2 + \epsilon_2(\frac{2z_2-\delta_2}{2\lambda_2})^2}$ aus Satz 4.1.5. Der Fall $\delta = (0,0)$ folgt auch mit diesem Satz, die konstanten Spinoren $(1,0)$ und $(0,1)$ sind Eigenspinoren zum Eigenwert Null. Satz 4.1.6 liefert, daßunendlich viele Zahlenpaare Lösungen liefern, die Zugehörigen Spinoren sind alle linear unabhängig.

Im Fall einer positiv definiten Metrik sind die beiden konstanten Spinoren harmonisch. Mehr kann es nicht geben, da die Funktionen $e^{i(z_1x+z_2y)}$ dicht im Raum aller in e_1- und e_2-Richtung 2π-periodischen Funktionen liegen. □

Lemma 4.1.8. *Für den rechteckigen Torus $T^{n,k}_{\mathbf{v},\delta}$, dessen erzeugendes Gitter von den Vektoren $v_i = \lambda_i e_i$ aufgespannt wird, hat der Diracoperator die Eigenwerte*
$$\left\{ \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i \frac{2z_i-\delta_i}{2\lambda_i}} \;\middle|\; z_i \in \mathbb{Z} \right\} \subset \sigma_p(T^{n,k}_{\mathbf{v},\delta}, D)$$

Beweis. Durch wiederholte Anwendung der Formel für den quadrierten Diracoperator aus Lemma 3.8.3 ist ersichtlich, daß der Spinor, für dessen erste Komponentenfunktion $\phi_1(x_1,\dots,x_n) = e^{i\sum_{j=1}^{n}\frac{2z_j-\delta_j}{2\lambda_j}x_j}$ gilt und dessen $2^{\lfloor n/2\rfloor -1}$ weiteren Komponentenfunktionen verschwinden ein Eigenspinor vom Quadrat des Diracoperators zum Eigenwert $\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\lambda^{-2}\left(\frac{2z_i-\delta_i}{2}\right)^2$ ist. Mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.8 wird nun ein Eigenspinor zum Eigenwert $\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\left(\frac{2z_i-\delta_i}{2\lambda_i}\right)^2}$ konstruiert. □

Lemma 4.1.9. *Sei ein rechteckiger Torus $T^{2m,k}_{\mathbf{v},\delta}$ mit $m>1$ gegeben und seien $\mathbf{v}' = (\lambda_1 e_1,\dots,\lambda_{2m-1}e_{2m-1})$ und $\delta' = (\delta_1,\dots,\delta_{2m-1})$.*

Dann ist die Eigenraumdimension eines Eigenwertes
$$\pm\mu_{\lambda_{\mathbf{z}},z_{2m}} = \pm\sqrt{\lambda_{\mathbf{z}}^2 + \epsilon_{2m}\left(\frac{2z_{2m}}{2\lambda_{2m}}\right)^2}$$

des Diracoperators $D_{T^{2m,k}_{\mathbf{v},\delta}}$, der vom Eigenwert $\lambda_{\mathbf{z}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{2m-1} \epsilon_k \frac{2z_k-\delta_k}{2\lambda_k}}$ des Diracoperators von $T^{2m-1,\hat{k}}_{\mathbf{v}',\delta'}$ konstruiert ist, mindestens doppelt so groß, wie die Dimension des Eigenraums zu λ_z.

Beweis. Die Idee des Beweises besteht darin, auszunutzen, daß das Spinorbündels einer $2m$-dimensionalen Mannigfaltigkeit doppelt so groß ist, wie das einer $2m-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Zunächst gilt für den Diracoperator im Fall $m > 1$:

$$D_{T^{2m}}\Psi = \begin{pmatrix} D_{T^{2m-1}} \\ \hat{D}_{T^{2m-1}} \end{pmatrix} \Psi + (-1)^{m-1} i\epsilon_{2m}\tau_{2m} \begin{pmatrix} \neg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_{2m}}\psi_2 \\ \neg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_{2m}}\psi_1 \end{pmatrix}.$$

Der Spinor ψ_1 hat 2^{m-1} Komponentenfunktionen. Wird die j-te Komponentenfunktion ψ_{1j} gleich der Funktion $e^{i(\sum_{k=1}^{2m} \frac{2z_k-\delta_k}{2\lambda_k} x_k)}$ gesetzt, während alle anderen Komponentenfunktionen und der Spinor ψ_2 verschwinden, so sei der dann zusammengesetzte Spinor mit Ψ_j bezeichnet. Die Spinoren Ψ_j sind Eigenspinoren des quadrierten Diracoperators $D_{T^{2m,k}_{\delta,\mathbf{v}}}$ zum Eigenwert $\mu^2_{\lambda_{\mathbf{z}},z_{2m}}$. Mit der Konstruktion aus Abschnitt 3.8 lassen sich daraus Eigenspinoren $\Psi_{j\pm}$ zu den Eigenwerten $\pm\mu^2_{\lambda_{\mathbf{z}},z_{2m}}$ konstruieren. Diese sind alle linear unabhängig, denn die einzigen Spinoren mit einer nichtverschwindenden $j+2^m$-ten Komponente, $1 \leq j \leq 2^m$ sind Ψ_{j+} und Ψ_{j-}. Diese sind aber linear unabhängig. □

Die Arbeit, um Satz 4.1.2 beweisen zu können, ist nun getan:

Beweis. Nach Lemma 4.1.8 ist klar, daß das Punktspektrum des rechteckigen n-Torus die Menge

$$\left\{ \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \left(\frac{2z_i-\delta_i}{2\lambda_i}\right)^2} \quad \middle| \quad z_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

enthält. Aus Lemma 4.1.9 ist ersichtlich, daß die Vielfachheit des zum n-Tupel $(z_1, \ldots, z_n)$ gehörigen Eigenwerts $\mu_{z_1,\ldots,z_n} = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{2z_i-\delta_i}{2} v_i^*\right|_{n,k}$ mindestens $2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$ ist. Georg Heß ([Heß96], Seite 74) zeigte mit auf anderem Wege, daß das Punktspektrum keine anderen Elemente enthalten kann und das die Eigenraumdimension zum Eigenwert $\mu^2_{z_1,\ldots,z_n}$ des quadrierten Diracoperators genau $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ ist. Da zur beschriebenen Konstruktion eines Eigenspinors zum Eigenwert $\mu_{z_1,\ldots,z_n}$ eine analoge Konstruktion eines Eigenspinors zum Eigenwert $-\mu_{z_1,\ldots,z_n}$ existiert, folgt die Behauptung über die Dimensionen. □

Bemerkung 4.1.10. *Es ist nun prinzipiell möglich, alle Eigenspinoren zu einem gegebenen Torus $T^{n,k}_{\mathbf{v}\delta}$ zu konstruieren. Dies ist mit den darstellungstheoretischen Überlegungen, die G. Heß in seiner Arbeit anwendet, nicht möglich.*

Korollar 4.1.11. *Das Punktspektrum des Diracoperators auf dem rechteckigen flachen Torus $T^{n,k}_{\mathbf{v}\delta}$ ist symmetrisch zur reellen und imaginären Achse. Es gilt insbesondere $\sigma_r(D) = \emptyset$.*

Beweis. Gilt für die Dimension n des Torus $n \equiv 0, 2, 3 \mod 4$, so wurde die Behauptung für allgemeine Mannigfaltigkeiten in Abschnitt 2.5 bewiesen. Sie folgt aber ebenso wie der im allgemeinen unbewiesene Fall $n \equiv 1 \mod 4$ aus der folgenden Argumentation: Die Symmetrie des Punktspektrums ist sofort aus Satz 4.1.2 ersichtlich. Das Verschwinden des Restspektrums folgt nun mit den allgemeinen Symmetrieeigenschaften der Spektralteile aus Lemma 2.5.1 beziehungsweise 2.5.2. Demnach gilt insbesondere für $\lambda \in \sigma_r(D)$, daß je nach Dimension und Kreinraum, das heißt je nachdem ob $\langle\ ,\ \rangle_a$ oder $\langle\ ,\ \rangle_b$ betrachtet wird, $\pm\overline{\lambda} \in \sigma_p(D)$ gilt. □

Bemerkung 4.1.12. *Im semiriemannschen Fall hat G. Hess in seiner Dissertation für rechteckige Tori gerader Dimension dasselbe Resultat erzielt. Dies gelang mit allgemeinen Symmetrieüberlegungen, wie sie in Abschnitt 2.5 diskutiert wurden. Von den dort bewiesenen Symmetrieeigenschaften der Spektralteile des Diracoperators waren ihm jedoch nur die im Satz 2.5.3 genannten bekannt. Die in jenem Abschnitt hergeleitete Symmetrie des Spektrums in Dimension $n \equiv 3 \mod 4$ erweitert sein Argument auf die Dimension $n \equiv 3 \mod 4$. In Dimension $n \equiv 1 \mod 4$ ist dies jedoch nicht möglich, da die benötigte Symmetrie nicht nachgewiesen werden konnte.*

Wann gilt $0 \in \sigma_{\sigma(D(T^{n-1,\hat{k}})),\mathbb{Z}}(D_{T^{n,k}}, \delta)$ und wie groß ist die Dimension der zugehörigen Eigenräume? Für zweidimensionale flache und rechteckige Tori wurde dies in Korollar 4.1.7 untersucht. Die Ergebnisse lassen sich auf beliebige Dimensionen verallgemeinern, dies geschieht im nächsten Korollar. Die Frage nach den Eigenraumdimensionen beliebiger Elemente des Punktspektrums soll aber für $n > 2$ nicht erörtert werden, da sich der Beweis in dieser Form in höheren Dimensionen nicht führen läßt.

Korollar 4.1.13. *Auf dem rechteckigen flachen Torus $T^{n,k}_{\mathbf{v}\delta}$ ist in folgenden Fällen Null ein Wert des Punktspektrums. Die folgenden Kriterien sind also hinreichend für die Existenz harmonischer Spinoren.*

1. *Ist $k = 0$ oder $k = n$, so gilt $0 \in \sigma_p(D, T^{n,k}_{\mathbf{v}\delta})$ nur im Fall der trivialen Spinstruktur. Der Raum der harmonischen Spinoren ist dann $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$-dimensional.*
2. *Ist $k \neq 0$ und $k \neq n$, so gilt genau dann $0 \in \sigma_p(D, T^{n,k}_{\mathbf{v}\delta})$, wenn mindestens ein $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0, \dots, 0)\}$ mit $0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \epsilon_i (\frac{z_i - \delta_1}{2\lambda_i})^2}$ existiert.*

   Ist $\mathbf{z} \neq (0, \dots, 0)$, so ist die Eigenraumdimension unendlich, während in dem Fall, daß $\mathbf{z} = \{0, \dots, 0)\}$ das einzige Zahlentupel *ist, das den Eigenwert Null liefert, die Dimension des Raumes der harmonischen Spinoren* $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ *ist.*

Beweis. Die erste Behauptung ist folgt aus der Tatsache, daß nur das Tupel $\mathbf{z} = (0, \ldots, 0)$ den Eigenwert Null liefern kann. Die Dimension des zugehörigen Eigenraums ist $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, da die Eigenraume von $-\mu_{(0,\ldots,0)}$ und $\mu_{(0,\ldots,0)}$ betrachtet werden müssen. Die zweite Behauptung folgt, falls $\mathbf{z} = (0, \ldots, 0)$ das einzige Tupel für den Eigenwert Null ist analog. Im anderen Fall liefert die die Multiplikation von $0 = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i (\frac{z_i - \delta_1}{2\lambda_i})^2$ mit dem Quadrat einer beliebigen ganzen Zahl ein weiteres Tupel, das den Eigenwert Null generiert. $\square$

4.2. Eine zweite Beispielklasse: $S_R^{n,0} \times_\sigma S_{\alpha\delta}^{1,k}$.

Eine weitere Klasse von Beispielen, für die zumindest eine Teilmenge des Punktspektrums vom Diracoperators berechnet werden kann, ist das Produkt der runden riemannschen Späre S_R^n konstanter Schnittkrümmng R mit der Sphäre $S_{\alpha\delta}^{1,k}$, die die konstante Schnittkrümmung α hat. Auch in diesem Abschnitt wird somit der Kodimension-1-Kalkül angewandt. Christian Ohn und Anne-Joëlle Vanderwinden sowie Georg Heß beschreiben in ihren Arbeiten [OV93] beziehungsweise [Heß96] den Fall $S^{1,0} \times S^{3,3}$, den sie mit darstellungstheoretischen Mitteln untersuchen. Die Resultate stimmen in dieser Dimension mit den in diesem Abschnitt hergeleiteten Ergebnissen prinzipiell überein, wenn die verschiedene Vorzeichenwahl berücksichtigt wird. In einem Punkt ist ihr Verfahren überlegen: Während die hier dargestellte Methode nur eine Teilmenge des Punktspektrums und untere Schranken für die Eigenraumdimensionen liefert, zeigt die deren Methode, daß diese Teilmenge tatsächlich mit dem Punktspektrum übereinstimmt und die angegebenen unteren Schranken gleichzeitig auch obere Schranken sind. Das hier vorgestellte Verfahren ermöglicht aber, wie auch schon beim Torus, die explizite Konstruktion von Eigenspinoren auf $S_R^n \times S_{\alpha,\delta}^{1,k}$, wenn Eigenspinoren auf S_R^n bekannt sind.

Zunächst seien einige bekannte Fakten über die Sphären S^n wiederholt.

Bemerkung 4.2.1. *Auf der eindimensionalen Sphäre S^1 zwei verschieden Spinstrukturen, die wie bisher üblich mit $\delta \in \{0;1\}$ gekennzeichnet seien. Demgegenüber läßt die Sphäre S^n für $n > 1$ genau eine Spinstruktur zu. Dies folgt aus $S^n = SO(n+1)/SO(n)$: Das Repèrebündel Q von S^n ist $SO(n+1)$ und eine Spinstruktur ist dann durch $P = Spin(n+1)$ gegeben. Daß dies auch tatsächlich die einzig mögliche Spinstruktur ist, folgt aus der Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$: $H_1(S^n;\mathbb{Z}_2) = 0$.*

Christian Bär, [Bär91], und Sonja Sulanke, [Sul81], haben das Spektrum des Diracoperators und die Vielfachheiten der Eigenwerte auf den Sphären S^n bestimmt:

Satz 4.2.2 ([Bär91], S.60).
Der Diracoperator hat auf der runden riemannschen Sphäre S^n mit Krümmung $K \equiv 1$ für $n \geq 2$ das Spektrum

$$\sigma(S^n, D) = \{n/2 + z \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Vielfachheit der Eigenwerte $\frac{n}{2} + z$ ist genau $2^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{z+n-1}{z}$, falls $z \geq 0$, und $2^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{|z|+n}{|z|}$, falls $z < 0$.

Wird statt der Sphäre S_1^n mit konstanter Schnittkrümmung 1 die Sphäre S_R^n mit konstanter Schnittkrümmung $R > 0$ betrachtet, so ändert sich das Spektrum um den Faktor $1/R$:

$$\sigma(S^n, D) = \left\{ \frac{n+2z}{2R} \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Aus den Sätzen 3.8.8 und 3.8.9 folgt

Satz 4.2.3. *Sei $S_R^{n,0} \times S_{\alpha,\delta}^{1,k}$ mit $n > 2$ betrachtet. Gilt ferner $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, so sind die Werte $\pm\mu_{z_1,z_2} = \pm\sqrt{(\frac{n+2z_1}{2R})^2 + \epsilon_{n+1}(\frac{2z_2-\delta}{2\alpha})^2}$ Eigenwerte des Diracoperators auf $S_R^n \times S_{\alpha\delta}^{1,k}$. Die Eigenraumdimension des Eigenwertes $\pm\mu_{z_1,z_2}$ ist für $z_1 \geq 0$ mindestens $2^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{z_1+n-1}{z_1}$ und für $z_1 < 0$ mindestens $2^m\binom{|z_1|+n}{|z_1|}$ für $z_1 < 0$.*

Für den Rest des Abschnitts werden wieder nur Eigenspinoren zu Eigenwerten λ betrachtet, die in Satz 4.2.3 prinzipiell konstruiert werden. Diese Teilmenge des Punktspektrums sei mit $\sigma_{\sigma(D_{S_R^n}),\mathbb{Z}}(D)$ bezeichnet.

Satz 4.2.4. *Sei $0 \neq \lambda \in \sigma_{\sigma(D_{S_R^n}),\mathbb{Z}}(D)$. Dann hat die Gleichung*

$$\lambda^2 = \left(\frac{n+2z_1}{2R}\right)^2 + \epsilon_{n+1}\left(\frac{2z_2-\delta}{2\alpha}\right)^2$$

1. *für $\frac{\alpha}{R} \in \mathbb{Q}$ entweder keine oder endlich viele Lösungen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*
2. *für $(\frac{\alpha}{R})^2 \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\alpha}{R} \notin \mathbb{Q}$ und $\epsilon_{n+1} = -1$ entweder keine oder unendlich viele Lösungen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*
3. *für $(\frac{\alpha}{R})^2 \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\alpha}{R} \notin \mathbb{Q}$ und $\epsilon_{n+1} = 1$ entweder keine oder endlich viele Lösungen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*
4. *für $(\frac{\alpha}{R})^2 \notin \mathbb{Q}$ die vier Lösungen (z_1, z_2), $(-z_1-n, z_2)$, $(z_1, -z_2+\delta)$ und $(-z_1-n, -z_2+\delta)$ in $\mathbb{Z}^2$, falls $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung ist.*

Beweis. Gesucht sind ganzzahlige Lösungen $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ von

$$\lambda^2 = \left(\frac{2z_1+n}{2R}\right)^2 + \epsilon_{n+1}\left(\frac{2z_2-\delta}{2\alpha}\right)^2. \tag{4.2}$$

Der Übersichtlichkeit halber sei $w_1 := 2z_1 + n$ und $w_2 := 2z_2 - \delta$.

Zunächst sei $\frac{\alpha}{R} = \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ mit s, $t \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Weiterhin seien $M := \min\{\frac{1}{4\alpha^2}; \frac{1}{4R^2}\}$, $u := \frac{1}{4M\alpha^2}$ und $v := \frac{1}{4MR^2}$. Dann gilt

$$\{u, v\} \in \left\{ \left\{1; \left(\frac{s}{t}\right)^2\right\}; \left\{1; \left(\frac{t}{s}\right)^2\right\} \right\}.$$

Das impliziert

$$\frac{\lambda^2}{M} = \left(\sqrt{v}w_1 + \sqrt{-\epsilon_{n+1}u}w_2\right)\left(\sqrt{v}w_1 - \sqrt{-\epsilon_{n+1}u}w_2\right).$$

Gilt nun $-\epsilon_{n+1} = u = 1$, so folgt

$$4t\lambda^2\alpha^2 = (sw_1 + tw_2)(sw_1 - tw_2)$$

Ist nun $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung der Gleichung 4.2, so ist $4t\lambda^2\alpha^2$ ganzzahlig. Da ganzzahlige Lösungspaare (z_1, z_2) gesucht sind, müssen $sw_1 + tw_2$ und $sw_1 - tw_2$ ganzzahlige Teiler von $4t\lambda^2\alpha^2$ sein. Davon kann es höchstens endlich viele geben.
Für $-\epsilon_{n+1} = v = 1$ folgt die Gleichung

$$4t\lambda^2 R^2 = (sw_1 + tw_2)(sw_1 - tw_2),$$

die im Falle eines ganzzahligen Lösungspaares (z_1, z_2) ebenfalls endlich viele Lösungen impliziert.
Im Fall $\epsilon_{n+1} = 1$ existieren auch höchstens endlich viele Teiler. Dies folgt aus einer analogen Argumentation in $\mathbb{Z}[i]$.

Sei nun $\frac{\alpha}{R} \notin \mathbb{Q}$ mit $(\frac{\alpha}{R})^2 = \frac{s}{t}$ mit $s, t \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Mit M, u und v wie oben folgt aus Gleichung 4.2:

$$\frac{\lambda^2}{M} = \frac{1}{M}\left(\left(\frac{w_1}{2R}\right)^2 + \epsilon_{n+1}\left(\frac{w_2}{2\alpha}\right)^2\right).$$

Für $-\epsilon_{n+1} = u = 1$ ergibt nun die Identität

$$4t\lambda^2\alpha^2 = sw_1^2 + tw_2^2.$$

Wie im Beweis von Theorem 4.1.6 werden nun für $l \in \mathbb{N}$ die Lösungen (x_l, y_l) der Pellschen Gleichung $x^2 - sty^2 = 1$ betrachtet. Für gerades l gilt nach [OV93], S. 267, stets $x_l \equiv 1 \mod 2$ und $y_l \equiv 0 \mod 2$. Ist nun $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung von

$$\lambda^2 = (\frac{2z_1 + n}{2R})^2 - (\frac{2z_2 - \delta}{2\alpha})^2,$$

so ist für l gerade auch (z_3, z_4) mit

$$z_3 := \frac{1}{2}(x_l(n + 2z_1) - ty_l(2z_2 - \delta) - n)$$
$$z_4 := \frac{1}{2}(x_l(2z_2 - \delta) - sy_l(n + 2z_1) + \delta)$$

eine Lösung. Es ist nun die Ganzzahligkeit von z_3 und z_4 nachzuweisen. Dazu ist eine Fallunterscheidung nach der Dimension n vorzunehmen.
<u>$n \equiv 1 \mod 2$:</u> Die Behauptung folgt dann für z_3, da $x_l(2z_1 + n)$ ungerade und $ty_l(2z_2 - \delta)$ gerade ist. z_4 ist ganzzahlig, da $x_l(2z_2 - \delta)$ je nach Spinstruktur gerade oder ungerade ist. In jedem Fall gilt aber $x_l(2z_2 - \delta) - \delta \equiv 0 \mod 2$. Ebenso ist $sy_l(2z_1 + n)$ stets gerade.
<u>$n \equiv 0 \mod 2$:</u> Da $x_l(2z_1 + n)$, $ty_l(2z_2 - \delta)$ und n gerade sind, folgt die Behauptung für z_3. Ebenso sind $x_l(2z_1 - \delta) + \delta$ und $ty_l(n + 2z_1)$ stets gerade. Somit ist z_4 eine ganze Zahl.
Insgesamt sind damit unendlich viele Lösungspaare nachgewiesen.
Daß im Fall $\epsilon_{n+1} = 1$ höchstens endlich viele Lösungen existieren, ist daran zu sehen, daß nur endlich viele ganze Zahlen z_1, z_2 existieren, für die $(\frac{2z_1+n}{2R})^2 + (\frac{2z_2-\delta}{2\alpha})^2 \leq c^2$ gilt.

Sei nun $(\frac{\alpha}{R})^2 \notin \mathbb{Q}$ betrachtet. Sind (z_1, z_2) und (z_3, z_4) mögliche Lösungen, so gilt sicherlich

$$\left(\frac{2z_1+n}{2R}\right)^2 + \epsilon_{n+1}\left(\frac{2z_2-\delta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{2z_3+n}{2R}\right)^2 + \epsilon_{n+1}\left(\frac{2z_4-\delta}{2\alpha}\right)^2.$$

Damit folgt

$$\frac{(2z_1+n)^2-(2z_3+n)^2}{(2R)^2} = \epsilon_{n+1}\frac{(2z_4-\delta)^2-(2z_2-\delta)^2}{(2\alpha)^2}.$$

Gilt nun $(2z_1+n)^2 \neq (2z_3+n)^2$ oder $(2z_2-\delta)^2 \neq (2z_4-\delta)^2$, so erhalten wir $(\frac{R}{\alpha})^2 \in \mathbb{Q}$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Damit kann $(2z_1+n)^2 = (2z_3+n)^2$ und $(2z_2-\delta)^2 = (2z_4-\delta)^2$ gefolgert werden. Das impliziert die vier angegebenen Lösungen. $\square$

Satz 4.2.5. *Nur im Fall $\epsilon_{n+1} = -1$ kann $0 \in \sigma_{\sigma(D_{S^n_R}),\mathbb{Z}}(D)$ auftreten. Dann ist die Gleichung $-\epsilon_{n+1}(\frac{n+2z_1}{2z_2-\delta})^2 = (\frac{R}{\alpha})^2$ für z_1, $z_2 \in \mathbb{Z}$ lösbar. Existiert ein von $(0,0)$ verschiedenes Lösungspaar, so existieren unendlich viele Lösungen. Der Raum der harmonischen Spinoren ist dann also unendlichdimensional.*

Beweis. Aus Satz 4.2.3 folgt, daß für alle Sphären S^n_R der Dimension $n \geq 2$ die Gleichung $0 = \left(\frac{2z_1+n}{2R}\right)^2 + \epsilon_{n+1}\left(\frac{2z_2-\delta}{2\alpha}\right)^2$ erfüllt sein muß. Damit muß $\epsilon_{n+1} = -1$ gelten und die geforderte Gleichung muß in $\mathbb{Z}^2$ lösbar sein. Ist ferner $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung dieser Gleichung, so ist für $l \in \mathbb{N}$ auch (z_3, z_4) mit

$$z_3 := (2l+1)z_1 + nl \qquad \text{und} \qquad z_4 := \frac{1}{2}[(2l+1)(2z_2-\delta)+\delta])$$

eine ganzzahlige Lösung, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2z_3+n}{2R}\right)^2 - \left(\frac{2z_4-\delta}{2\alpha}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2((2l+1)z_1+nl)+n}{2R}\right)^2 - \left(\frac{2(\frac{1}{2}[(2l+1)(2z_2-\delta)+\delta]))-\delta}{2\alpha}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(2l+1)(2z_1+n)}{2R}\right)^2 - \left(\frac{(2l+1)(2z_2-\delta)}{2\alpha}\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Korollar 4.2.6. *Im Spezialfall $R = 1$ ist auf $S^n \times S^{1,1}_{\alpha\delta}$ genau dann der Eigenraum zum Eigenwert $0 \in \sigma_{\sigma(S^n),\mathbb{Z}}(S^n \times S^{1,1}_{\alpha,\delta})$ unendlichdimensional, wenn eines der folgenden Kriterien erfüllt ist:*

- *Ist n gerade und $\delta = 0$, so muß $\frac{1}{\alpha}$ ganzzahlig sein.*
- *Ist n gerade und $\delta = 1$, so muß $\frac{1}{\alpha}$ ganzzahlig und gerade sein.*
- *Ist n ungerade und $\delta = 0$, so muß $\frac{1}{\alpha}$ die Hälfte einer ungeraden Zahl sein.*
- *Ist n ungerade und $\delta = 1$, so muß $\frac{1}{\alpha}$ ganzzahlig und ungerade sein.*

Ausblick

In dieser Arbeit wurden verschiedene Punkte semiriemannscher Spingeometrie untersucht. In nahezu allen Bereichen sind noch fundamentale Probleme ungelöst.

Zwei grundlegende Fragestellungen sind in Problem 1.3.8 formuliert worden. Dazu sei $(M^{n,k}, g)$ eine raum- und zeitartig orientierbare semiriemannsche Spinmannsgfaltigkeit. Wann existiert eine assoziierte riemannsche Struktur, die vollständig ist? Und impliziert die Vollständigkeit einer assoziierten riemannsche Struktur die Vollständigkeit bezüglich jeder anderen assoziierten riemannschen Struktur? Daß es Sinn macht diese Fragen zu stellen, folgt beispielsweise aus Korollar 2.4.4. Die Selbstadjungiertheit des Diracoperators im Kreinraum konnte nur unter der Bedingung der Vollständigkeit dieser assoziierten Struktur gezeigt werden. In Bemerkung 1.3.11 wurde schon darauf hingewiesen, daß die zweite Frage mit der in Lemma 1.3.10 hergeleiteten Formel auf parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten eingehender studiert werden kann.

Die Frage nach der Existenz des Restspektrums hat sich leider nicht in Sinne von [Bau94] geklärt. Mit den Symmetrien läßt sich nicht mehr als in Abschnitt 2.5 zeigen. Übrigens ist bisher kein Beispiel einer $(4n+1)$-dimensionalen semiriemannschen Spinmannigfaltigkeit bekannt, auf der ein nicht leeres Restspektrum des Diracoperators nachgewiesen werden konnte.

Daß die Übertragung des Kodimesion-1-Formalismus funktionierte, war naheliegend. Wie im riemannschen Fall hat er sich auch in der Arbeit von Christoph Bohle [Boh98] über Twistor- und Killingspinoren als äußerst nützlich erwiesen. Mit Hilfe dieses Kalküls konnten für konstante Funktionen σ bekannte Ergebnisse auf rechteckigen flachen Tori auf „neuem“ Weg hergeleitet werden. Auf riemannschen Tori wurde dies beispielsweise von Thomas Friedrich in [Fri84] benutzt, aber auf semiriemannschen Mannigfaltigkeiten scheint der darstellungstheortische Ansatz üblich zu sein. Es ist wahrscheinlich möglich, den Kodimension-1-Kalkül zu benutzen, um nicht rechteckige flache Tori zu untersuchen. Dazu ist aber erst zu klären, welche Gitter nach der Faktorisierung eine nicht ausgeartete Metrik liefern. Der in [OV93] diskutierte Fall des kompaktifizierten Minkowskiraums konnte ebenfalls mit dieser Technik auf den Fall $S^{n,0} \times S^{1,k}$ verallgemeinert werden.

Bedauerlicherweise konnte der Fall einer nicht konstanten Warping-Funktion σ nicht einmal in Spezialfällen, wie beispielsweise der Warping-Funktion $\sigma(t) = 4 + 2\cos(t) = e^{-it} + 4 + e^{it}$, gelöst werden. Wird mit dieser Warping-Funktion ein Produktansatz gemacht, wie er in Abschnitt 3.9 beschrieben wurde, so folgt aus der in diesem Abschnitt hergeleiteten gewöhnlichen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten eine Rekursionsbeziehung zwischen den Koeffizienten der Fourierreihenentwicklung einer hypothetischen 2π-(schief)periodischen

Lösung. Im Fall der von Ξ induzierten Spinstruktur folgt so für eine hypothetische 2π-periodische Lösung $f(t) = \sum_{z\in\mathbb{Z}} a_z e^{izt}$ aus den Sätzen 3.9.5 beziehungsweise 3.9.4 mit $\sigma(t) = 4 + 2\cos(t)$ die Rekursion:

$$\begin{aligned}0 = \left(1 - 4(z+2)^2\right) a_{z+2} &+ 8\left(1 - 4(z+1)^2\right) a_{z+1} \\ &+ \left(6 + \tilde{\nu} - 72z^2\right) a_z \\ &+ 8\left(1 - 4(z-1)^2\right) a_{z-1} \\ &+ \left(1 - 4(z-2)^2\right) a_{z-2}.\end{aligned}$$

Die Konstante $\tilde{\nu}$ ist dabei durch je einen Eigenwert auf dem Produkt und auf der Basis bestimmt. Die so entstehenden Rekursionen konnten in keinem der auftretenden Fälle (verschiedene Spinstrukturen, direkte Produkte/Warped-Produkte, Diracoperator und sein Quadrat) gelöst werden. Ebenso haben Experimente mit Mathematica für variierende Startwerte (im Fall der obigen angegebenen Rekursion sind beispielsweise vier Startwerte frei wählbar) und variierende Werte für $\tilde{\nu}$ kein Indiz geliefert, daß die Rekursionen für gewisse Paramater Nullfolgen liefern, was wohl als Mindestforderung für die Konvergenz der Fourierreihe anzusehen ist. Die Untersuchung dieses Themenkomplexes steht daher noch aus.

1. Die reellen und quaternionischen Strukturen, die aus der riemannschen Spingeometrie bekannt sind, sind auch im semiriemannschen Fall reelle und quaternionische Strukturen. Diese Strukturen haben kompliziertere Vertauschungsrelationen mit der Cliffordmultiplikation, die insbesondere abhängig von der Wahl eines maximal zeitartigen Unterbündels ves Tangentialbündels sind. Es existieren jedoch weitere Strukturen, die in Abhängigkeit von der Dimension der Mannigfaltigkeit und dem Index der Metrik reell oder quaternionisch sind. Diese (anti-)kommutieren je nach Dimension und Index mit der Cliffordmultiplikation.
2. Jede Potenz von $i^{r-1}D$ ist im Kreinraum $(L^2_\xi, (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle_a, \mathcal{J}_a)$ wesentlich selbstadjungiert, falls (M, r_ξ) vollständig ist. Gleiches gilt für i^kD in $(L^2_\xi, (\ ,\ )_\xi, \langle\ ,\ \rangle_b, \mathcal{J}_b)$.
3. Symmetrieeigenschaften des Spektrums vom Diracoperator auf raum- und zeitartig orientierbaren semiriemannschen Spinmannigfaltigkeiten $M^{n,k}$ lassen sich mit Hilfe der reellen und quaternionischen Strukturen der ersten These beschreiben. Mit Hilfe allgemeiner Symmetrieeigenschaften von abgeschlossenen und selbstadjungierten Operatoren in Kreinräumen folgt:
   - In geraden Dimensionen ist sowohl Punktspektrum als auch stetiges Spektrum symmetrisch zur reellen und imaginären Achse verteilt. Kein Restpektrum tritt auf.
   - In den Dimensionen $n \equiv 3 \mod 4$ tritt niemals Restspektrum auf. Für gerades k sind Punktspektrum und stetiges Spektrum symmetrisch zur reellen Achse, während für ungerades k Punktspektrum und stetiges Spektrum symmetrisch zur imaginären Achse sind.
   - In den Dimensionen $n \equiv 1 \mod 4$ gilt, daß das stetige Spektrum stets zur reellen und imaginären Achse symmetrisch ist. Für gerades k sind Punkt- und Restspektrum symmetrisch zur reellen Achse und es gilt $\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})} \subset \sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$, wobei $\overline{}$ komplexe Konjugation bezeichnet. Für ungerades k sind Punkt- und Restspektrum symmetrisch zur imaginären Achse und es gilt $\overline{\sigma_r(D^{\mathrm{cl}})} \subset -\sigma_p(D^{\mathrm{cl}})$
4. Der Kodimension-1-Kalkül aus der riemannschen Spingeometrie läßt sich auf den semiriemannschen Fall übertragen. Weiterhin lassen sich aus Produkten mit $\mathbb{R}$ Produkte mit der Sphäre S^1 ableiten. Der Diracoperator läßt sich auf diesen Räumen weiter untersuchen. Für Produkte des Typs $M \times_\sigma S^1$ lassen sich für konstantes σ konkrete Formeln angeben, die das Punktspektrum des Produktraums in Abhängigkeit vom Spektrum des Diracoperstors auf M beschrieben. Insbesondere lassen sich Eigenspinoren konstruieren, wenn Eigenspinoren auf M bekannt sind. Ist σ nicht

konstant, so kann eine gewöhnliche Differentialgleichung angegeben werden, die Eigenspinoren, die einem Produktansatz genügen, erfüllen müssen.

5. Der Kodimension-1-Kalkül läßt sich verwenden, um Aussagen über das Punktspektrum und die Eigenspinoren auf rechteckigen flachen Tori und über das Punktspektrum auf $S^{n,0}(R) \times S^{1,k}(r)$ abzuleiten. Die Resultate ergänzen darstellungstheoretische Resultate.

Literatur

[AI89] Tomas J. Azizov and Iosif S. Iokhvidov. *Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Chicester, 1989.

[Bär91] Christian Bär. *Das Spektrum von Dirac-Operatoren*. Bonner Mathematische Schriften: 217. Math.-Naturwissenschaflich Fakultät der Universität Bonn, 1991.

[Bau81] Helga Baum. *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten*. Teubner Texte zur Mathematik: 41. Teubner-Verlag, Leipzig, 1981.

[Bau94] Helga Baum. A remark on the spectrum of the Dirac operator on pseudo-Riemannian spin manifolds. *Sfb 288 Preprint No. 136*, 1994.

[BFGK91] Helga Baum, Thomas Friedrich, Ralf Grunewald, and Ines Kath. *Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*. Teubner-Texte zur Mathematik: 124. Teubner-Verlag, Stuttgart/Leipzig, 1991.

[Bog74] János Bognár. *Indefinite Inner Product Spaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete:78. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[Boh98] Christoph Bohle. *Killing and Twistor Spinors on Lorentzian Manifolds*. Diplomarbeit an der Freien Universität Berlin, 1998.

[Che73] Paul R. Chernoff. Essential Self-Adjointness of Powers of Generators of Hyperbolic Equations. *J. of Functional Analysis*, 12:401–414, 1973.

[Dir28] Paul Anrè Maurice Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. of London*, A 117:610–624, 1928.

[Fri80] Thomas Friedrich. Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung. *Math. Nachr.*, 97:117–146, 1980.

[Fri84] Thomas Friedrich. Zur Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur. *Colloquium Mathematicum*, 48:57–62, 1984.

[Fri97] Thomas Friedrich. *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.

[Ger68] Robert Geroch. Spinor Structures of Space-Times in General Relativity I. *J. of Math. Phys.*, 9:1739–1744, 1968.

[Ger70] Robert Geroch. Spinor Structures of Space-Times in General Relativity II. *J. of Math. Phys.*, 11:343–348, 1970.

[Heß96] Georg W. Heß. *Canonically generalized spin structures and Dirac operators on semi-Riemannian manifolds*. Dissertation, Universität München, 1996.

[Hit74] Nigel Hitchin. Harmonic Spinors. *Adv. in Math.*, 14:1–55, 1974.

[Kar68] Max Karoubi. Algèbres de Clifford et K-Théorie. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série*, 1:161–270, 1968.

[Kir86] Klaus-Dieter Kirchberg. An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds with positive scalar curvature. *Ann. Glob. Anal.Geom.*, 4:291–326, 1986.

[Kir88] Klaus-Dieter Kirchberg. Compact six-dimensional Kähler spin manifolds of positive scalar curvature with the smallest possible first eigenvalue of the Dirac operator. *Math. Ann.*, 282:157–176, 1988.

[Kir90] Klaus-Dieter Kirchberg. Twistor spinors on Kähler manifolds and the first eigenvalue of the Dirac operator. *J. Geom. Phys.*, 7:449–468, 1990.

[Lic64] Andrè Lichnerowicz. Champs spinoriels et propagateurs en relativitè gènèrale. *Bull. Math. Soc. France*, 92:11–100, 1964.

[LM89] H. Blaine Lawson and Marie-Luise Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton Mathematical Series: 38. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[Mil63] John W. Milnor. Spin-Structures on Manifolds. *Enseignement Mathem.*, 9:55–62, 1963.

[Mil65] John W. Milnor. Remarks concerning Spin Manifolds. *Differential and Combinatorial Topology*, 1965.

[Mor69] Louis J. Mordell. *Diophantine Equations*. Pure and Applied Mathematics: 30. Academic Press, London, New York, 1969.

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies 76. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[O'N83] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry*. Pure and Applied Mathematics: 103. Academic Press, London, New York, 1983.

[OV93] Christian Ohn and Anne-Joëlle Vanderwinden. The Dirac operator on compactified Minkowski space. *Bull. Cl. Sci. VI. Ser. Acad. R. Belg.*, 4:255–268, 1993.

[Pau27] Wolfgang Pauli. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 43:601–623, 1927.

[Sul81] Sonja Sulanke. *Berechnung des Spektrums des Quadrats des Dirac-Operators auf der Sphäre und Untersuchungen zum ersten Eigenwert von D auf fünfdimensionalen Räumen konstanter positiver Schnittkrümmung.* Dissertation an der Humboldt Universität zu Berlin, 1981.

[UG25] George E. Uhlenbeck and Samuel Goudsmit. Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons. *Die Naturwissenschaften*, 953–954, 20.11.1925.

[Wol73] Joseph A. Wolf. Essential Self-Adjointness for the Dirac Operator and its Sqare. *Indiana Univ. Math. J.*, 22(611-640), 1973.