Krawattenrätsel - Verbesserung der oberen Schranke

Felix Kälberer*, Matthias Nieser*, Ulrich Reitebuch*

29. Dezember 2008

Zusammenfassung

Die folgenden Seiten beschreiben neue Erkenntnisse im Krawattenrätsel. Wir können noch keinen optimalen Algorithmus angeben, aber die obere Schranke auf $\lfloor 2/3\, n^2 - 2/3 \rfloor$ Vertauschungen verbessern. Der hier angegebene Algorithmus liegt somit nur um höchstens $n/3$ Vertauschungen vom Optimum entfernt. Für $n = 2^j + 1$, $j \in \mathbb{N}$ ist der Algorithmus sogar optimal und benötigt nur $2/3n^2 - n/3$ viele Vertauschungen.

1 Notation

Gegeben seien n Töpfe, die von 0 bis $n-1$ aufsteigend nummeriert sind. Jeder Topf i enthalte zwei Kugen mit den Nummern $2n-2i-1$ und $2n-2i-2$. Ziel ist es, die Kugeln so zu sortieren, dass in Topf i die Nummern $2i$ und $2i+1$ liegen. Diese Nummerierung weicht etwas von der originalen Nummerierung in der Aufgabenstellung des Krawattenrätsels ab (dort haben je zwei Kugeln dieselbe Nummer), die Problemstellung wird dadurch aber nicht verändert.
Zur übersichtlicheren Beschreibung des Algorithmus, wird jeder Topf in zwei Hälften *oben* (o) und *unten* (u) unterteilt, in denen je eine Kugel liegt. Eine Vertauschung wird durch zwei Tupel der Form $(i, o/u) \leftrightarrow (i+1, o/u)$ angegeben. Dabei wird die obere/untere Kugel aus Topf i mit der oberen/unteren Kugel aus Topf $i+1$ getauscht. Die abkürzende Schreibweise

$$i \xrightarrow{o/u} j$$

bedeutet, dass die obere (bzw. untere) Kugel aus Topf i entlang der oberen (unteren) Reihe bis Topf j geschoben wird. Dabei werden $|j-i|$ Operationen benötigt.
An einigen Stellen wird die Operation `flip(i,j)` benutzt. Dabei werden in den Töpfen i bis j die oberen mit den unteren Kugeln vertauscht. Diese Operation wird nicht als Vertauschung gezählt, da es eigentlich unerheblich ist, ob eine Kugel oben oder unten liegt. Es dient lediglich der übersichtlicheren Notation.

2 Der Algorithmus

Der Algorithmus besteht aus einer Hauptmethode `krawattenloeser(n)` und einer rekursiven Methode `invert(n)`. Die Hauptmethode invertiert die Reihenfolge der Kugeln in den $2n$ Töpfen. Dabei wird die rekursive Methode aufgerufen, die ein jeweiliges Teilproblem löst.
Die genaue Funktionsweise der Methoden werden in den Sektionen 3 und 4 erklärt. Der Pseudocode der Methoden ist wie folgt:

*Freie Universität Berlin, Institut für Mathematik und Informatik
unterstützt durch das DFG Forschungszentrum Matheon „Mathematik für Schlüsseltechnologien
<kaelberer,nieser,reitebuch>@mi.fu-berlin.de

Algorithm 1 Krawattenlöser(n)

if $n == 1$ **then**
  return
end if
Tausche $0 \xrightarrow{u} n-1$
Call `invert(`$n-1$`)`

Algorithm 2 invert(k) für gerade k

Tausche $(0, o) \leftrightarrow (1, u)$
Tausche $1 \xrightarrow{u} k-1$
Tausche $(k-1, u) \leftrightarrow (k, o)$
for $j = 1$ to $k/2 - 1$ **do**
  Tausche $(j, o) \leftrightarrow (j+1, u)$
  Tausche $j+1 \xrightarrow{u} k-j$
end for
flip$(0, k-1)$
Call `invert(`$k/2$`)`
flip$(0, k/2)$
for $j = 0$ to $k/2 - 2$ **do**
  Tausche $k/2 - j \xrightarrow{u} k - 1 - 2j$
  Tausche $(k/2 - j - 1, o) \leftrightarrow (k/2 - j, u)$
  Tausche $k/2 - j \xrightarrow{u} k - 2 - 2j$
end for

Algorithm 3 invert(k) für ungerade k

if $k == 1$ **then**
  Tausche $(0, o) \leftrightarrow (1, o)$
  return
end if
Tausche $(0, o) \leftrightarrow (1, u)$
Tausche $1 \xrightarrow{u} k-1$
Tausche $(k-1, u) \leftrightarrow (k, o)$
for $j = 1$ to $(k-1)/2$ **do**
  Tausche $(j, o) \leftrightarrow (j+1, u)$
  Tausche $j+1 \xrightarrow{u} k-j$
end for
flip$(0, k-1)$
Call `invert(`$(k-1)/2$`)`
for $j = 0$ to $(k-3)/2$ **do**
  Tausche $((k-1)/2 - j, o) \leftrightarrow ((k-1)/2 - j + 1, u)$
  Tausche $(k-1)/2 - j + 1 \xrightarrow{u} k - 1 - 2j$
  Tausche $(k-1)/2 - j - 1 \xrightarrow{u} k - 2 - 2j$
end for
flip$(0, 0)$

3 Krawattenlöser

Zu Beginn seien die Kugeln in den n Töpfen seien wie folgt verteilt:

2n-2	2n-4	...	2	0
2n-1	2n-3	...	3	1

Ein Aufruf der Methode `krawattenloeser(`n`)` macht daraus:

1	3	...	2n-3	2n-1
0	2	...	2n-4	2n-2

Zeilen 1–3 :
Behandelt den Spezialfall für $n = 1$.

Zeile 4 :
Schiebt die Kugel $2n - 1$ entlang der unteren Reihe in Topf $n - 1$ (benötigt $n - 1$ viele Vertauschungen):

2n-2	2n-4	...	2	0
2n-3	2n-5	...	1	2n-1

Zeile 5 :
Ruft die rekursive Methode `invert(`$n - 1$`)` auf, die die Kugeln in den Töpfen 0 bis $n - 2$, sowie die obere Kugel in Topf $n - 1$ richtig einsortiert (siehe Sektion 4).

4 Die Methode *invert(k)*

Der eigentliche Teil des Krawattenlösers besteht aus der rekursiven Methode `invert(`k`)`. Sie operiert nur auf den Kugeln in den Töpfen 0 bis $k - 1$, sowie auf der oberen Kugel in Topf k. Sei die Konfiguration bei Aufruf der Methode wie folgt:

2k	2k-2	...	2	0
2k-1	2k-3	...	1	

Die Methode macht daraus:

0	2	...	2k-2	2k
1	3	...	2k-1	

Die Methode unterscheidet sich für gerade und ungerade k. Die Funktionsweise der zwei Algorithmen wird in den folgenden Sektionen beschrieben.

4.1 *invert(k)* für gerade k

Zeilen 1–3 :
Schiebt Kugel $2k$ entlang der unteren Reihe an ihre endgültige Position in Topf k.

2k-3	2k-2	2k-4	...	4	2	2k
2k-1	2k-5	2k-7	...	1	0	

Dabei werden k Vertauschungen benötigt.

Zeilen 4–7 :

Alle anderen oberen Kugeln aus den Töpfen 1 bis $k/2-1$ werden nun nacheinander entlang der unteren Reihe an ihre Endposition (Töpfe $k-1$ bis $k/2+1$) geschoben. Zunächst einmal Kugel $2k-2$:

2k-3	2k-7	2k-4	2k-6	...	6	4	2	2k
2k-1	2k-5	2k-9	2k-11	...	1	0	2k-2	

Dafür werden $k-2$ Vertauschungen benötigt.

Dann Kugel $2k-4$ ($k-4$ Vertauschungen), usw. Die Kugel $k+2$ wird als letzte in dieser Schleife um 2 Plätze nach rechts getauscht. Danach sieht die Verteilung folgendermassen aus:

2k-3	2k-7	2k-11	...	1	k	k-2	...	4	2	2k
2k-1	2k-5	2k-9	...	3	0	k+2	...	2k-4	2k-2	

Die Anzahl der Vertauschungen in den Zeilen 7–10 ist:

$$\sum_{i=1}^{k/2-1} (k-2i) = \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}k.$$

Zeile 8 :

Die oberen und unteren Kugeln werden in den Töpfen 0 bis $k-1$ vertauscht. Dies zählt nicht als Vertauschungs-Operation, da die Kugeln innerhalb eines Topfes gleichberechtigt sind und für den Algorithmus nicht vertauscht werden müssen. Das passiert hier nur, um den rekursiven Aufruf einfacher beschreiben zu können.

2k-1	2k-5	2k-9	...	3	0	k+2	...	2k-4	2k-2	2k
2k-3	2k-7	2k-11	...	1	k	k-2	...	4	2	

Zeile 9 :

Ruft die Methode rekursiv auf. Dabei werden die Kugeln in den Töpfen 0 bis $k/2-1$, sowie die obere Kugel aus Topf $k/2$ in der Reihenfolge umgekehrt.

0	3	7	...	2k-5	2k-1	k+2	...	2k-4	2k-2	2k
1	5	9	...	2k-3	k	k-2	...	4	2	

Zeile 10 :

Vertauscht die oberen und unteren Kugeln aus den Töpfen 1 bis $k/2$.

1	5	9	...	2k-3	k	k+2	...	2k-4	2k-2	2k
0	3	7	...	2k-5	2k-1	k-2	...	4	2	

Zeilen 11–15 :

In dieser Schleife werden nun nacheinander die Kugeln $2k-1, 2k-3, \ldots, 5$ entlang der unteren Reihe an ihre finalen Positionen geschoben. Zunächst einmal Kugel $2k-1$ (benötigt $k/2-1$ Vertauschungen).

1	5	9	...	2k-3	k	k+2	...	2k-4	2k-2	2k
0	3	7	...	2k-5	k-2	k-4	...	2	2k-1	

Dann Kugel $2k-3$ ($k/2-1$ Vertauschungen):

1	5	9	...	2k-7	k-2	k	k+2	...	2k-6	2k-4	2k-2	2k
0	3	7	...	2k-9	2k-5	k-4	k-6	...	2	2k-3	2k-1	

Die Kugeln $2k$ bis $2k-4$ sind nun an ihrer richtigen Endposition. Die linken $k-2$ Töpfe zusammen mit der oberen Kugel aus Topf $k-2$ bilden genau dieselbe Konfiguration wie die Situation nach Zeile 10, nur dass k jetzt um 2 kleiner geworden ist.

Wenn also die Zeilen 12–14 in der Schleife ausgeführt werden, werden nach und nach alle Kugeln an ihre richtige Position einsortiert. Als letztes wird Kugel 5 mit einem Vertauschungsschritt gegen die 2 getauscht werden. Danach sind alle Kugeln aufsteigend sortiert.

Die Anzahl der Vertauschungen der gesamten Schleife ist:

$$\sum_{i=0}^{k/2-2}\left(\left(\frac{1}{2}k-1-i\right)+\left(\frac{1}{2}k-1-i\right)\right)=\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{2}k$$

4.2 *invert(k)* für ungerade k

Zeilen 1–4 :
Behandelt den Spezialfall für $k=1$, um die Rekursion zu beenden.

Zeilen 5–11 :
Genauso wie für ungerade k. Die oberen Kugeln aus den Töpfen 0 bis $(k-1)/2$ werden entlang der unteren Reihe in die Töpfe k bis $(k+1)/2$ geschoben. Als letztes wird Kugel $k+1$ mit einer Vertauschung in Topf $(k+1)/2$ getauscht.

2k-3	2k-7	2k-11	...	3	0	k-1	k-3	...	4	2	2k
2k-1	2k-5	2k-9	...	5	1	k+1	k+3	...	2k-4	2k-2	

Die Anzahl der Vertauschungen in den Zeilen 5–11 ist:

$$\sum_{i=0}^{(k-1)/2}(k-2i)=\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}.$$

Zeile 12 :
Vertauscht obere und untere Kugeln in den Töpfen 0 bis $k-1$.

2k-1	2k-5	2k-9	...	5	1	k+1	k+3	...	2k-4	2k-2	2k
2k-3	2k-7	2k-11	...	3	0	k-1	k-3	...	4	2	

Zeile 13 :
Rekursiver Aufruf des Algorithmus auf die linken $(k-1)/2$ Töpfe (sowie die obere Kugel aus Topf $(k-1)/2$).

1	5	...	2k-9	2k-5	2k-1	k+1	k+3	...	2k-4	2k-2	2k
3	7	...	2k-7	2k-3	0	k-1	k-3	...	4	2	

Zeilen 14–18 :

Es werden nacheinander die Kugeln $2k-1$,$2k-3$,...,3 entlang der unteren Reihe an ihre finalen Positionen geschoben. Zunächst einmal Kugel $2k-1$ (benötigt $(k-1)/2$ Vertauschungen).

1	5	...	2k-9	2k-5	k-1	k+1	k+3	...	2k-4	2k-2	2k
3	7	...	2k-7	2k-3	0	k-3	k-5	...	2	2k-1	

Dann Kugel $2k-3$ ($(k-3)/2$ Vertauschungen):

1	5	...	2k-9	2k-5	k-1	k+1	k+3	...	2k-6	2k-4	2k-2	2k
3	7	...	2k-7	0	k-3	k-5	k-7	...	2	2k-3	2k-1	

Die Kugeln $2k$ bis $2k-4$ sind nun an ihrer richtigen Endposition. Die linken $k-2$ Töpfe zusammen mit der oberen Kugel aus Topf $k-2$ bilden genau dieselbe Konfiguration wie die Situation nach Zeile 13, nur dass k jetzt um 2 kleiner geworden ist.

Wenn also die Zeilen 14–18 in der Schleife ausgeführt werden, werden nach und nach alle Kugeln an ihre richtige Position einsortiert. Als letztes wird Kugel 3 in Topf 0 mit einem Vertauschungsschritt gegen Kugel 0 in Topf 1 getauscht werden.

1	2	4	...	k-3	k-1	k+1	k+3	...	2k-2	2k
0	3	5	...	k-2	k	k+2	k+4	...	2k-1	

Die Anzahl der Vertauschungen der gesamten Schleife ist:

$$\sum_{i=0}^{(k-3)/2} \left(\left(\frac{k-1}{2} - i \right) + \left(\frac{k-1}{2} - i \right) \right) = \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}.$$

Zeile 19 :

Vertauscht obere und untere Kugel in Topf 0.

5 Aufwandsberechnung

Zählt man die Vertauschungen aus Sektion 4 zusammen, erhält man den Gesamtaufwand der `invert`-Methode:

für gerade k :

$$i(k) = \frac{1}{2}k^2 + i\left(\frac{k}{2}\right). \tag{1}$$

für ungerade k :

$$i(k) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + i\left(\frac{k-1}{2}\right). \tag{2}$$

Der Aufwand des Krawattenlösers berechnet sich nun wie folgt:

Fall 1: $n = 2^j + 1, j \in \mathbb{N}$

In diesem Fall wird die Methode `invert(`$k = 2^j$`)` aufgerufen. Für alle rekursiven Aufrufe ist k somit gerade. Durch vollständige Induktion nach der Rekursionsformel (1) kann die folgende Gleichung für den Aufwand leicht verifiziert werden:

$$i(k) = \frac{2}{3}k^2 + \frac{1}{3}.$$

Somit benötigt der Krawattenlöser die folgende Anzahl an Vertauschungen:

$$k(n) = n - 1 + i(n-1) = \frac{2}{3}n^2 - \frac{1}{3}n$$

Er kommt also an die theoretische untere Schranke und ist somit optimal.

Fall 2: n beliebig

Für beliebige n ist der Algorithmus nicht unbedingt optimal. Es lässt sich aus den Formeln (1) und (2) per vollständiger Induktion folgern:

$$i(k) \leq \frac{2}{3}k^2 + \frac{1}{3}k.$$

Der Krawattenlöser benötigt also maximal

$$k(n) = n - 1 + i(n-1) \leq \frac{2}{3}n^2 - \frac{2}{3}$$

viele Vertauschungen.